

## G. de B. Robinson Award

Philippe Gille



## Prix G. de B. Robinson

Philippe Gille

The G. de B. Robinson Award is given out to recognize outstanding contributions to the Canadian Journal of Mathematics or the Canadian Mathematical Bulletin.

Philippe Gille's paper "Octonion algebras over rings are not determined by their norms" (Canad. Math. Bull. 57 (2), 2014, 303--309) is a perfect example of how powerful abstract techniques in one area of mathematics (Grothendieck-style algebraic geometry) can be used to decisively settle long-standing problems in another area, namely non-associative algebra.

The classic problem studied in this paper concerns octonion algebras, which have been known since 1843 (Graves, Cayley). Octonion algebras over fields are 8-dimensional analogues of quaternion algebras, obtained by the Cayley-Dickson doubling process from quaternion algebras. Octonion division algebras are known to parametrize certain non-Desarguesian planes (Moufang 1933, Faulkner 1970). General octonion algebras over fields enter in the description of exceptional Lie algebras, Lie groups and algebraic groups of all types. For

---

Le Prix G. de B. Robinson est décerné en reconnaissance de contributions extraordinaires au Journal canadien de mathématiques ou au Bulletin canadien de mathématiques. L'article de Philippe Gille intitulé : "Les algèbres d'octonions sur anneaux ne sont pas déterminées par leurs normes" (Octonion algebras over rings are not determined by their norms) (Canad. Math. Bull. 57 (2), 2014, 303–309) est le parfait exemple du pouvoir des techniques abstraites d'une branche des mathématiques (la géométrie algébrique de type Grothendieck) utilisées afin de résoudre des problèmes de longue date dans une autre branche, à savoir celle de l'algèbre non associative.

Le problème classique étudié dans cet article concerne les algèbres d'octonions, qui est connu depuis 1843 (Graves, Cayley). Une algèbre d'octonions sur un corps commutatif est de 8 dimensions et analogue à une algèbre de quaternions, obtenue par le processus de doublement de Cayley-Dickson provenant de l'algèbre de quaternions. Les algèbres de divisions d'octonions sont connues pour leur paramétrage

example, the automorphism group of an octonion algebra over a field is a simple algebraic group of type  $G_2$  and this defines a bijection between the isomorphism classes of the two types of objects, a result essentially due to Springer. Moreover, the fact that octonion algebras are determined by the norm form (Hurwitz problem, solved by Jacobson 1958 and van der Blij-Springer 1959) provides a means to assign to them cohomological invariants, constructed in terms of the norm forms.

With the advent of Chevalley groups and Grothendieck's theory of group schemes it became natural to study octonion algebras over rings and to extend the results described above to this setting. While it has been known since 1978 (Knus-Ojanguren-Sridharan) that quaternion algebras over rings are determined by their norm forms, the corresponding question for octonion algebras over rings was open until Gille's paper. In this paper Gille demonstrates conclusively that the property fails in general by parameterizing the failure with an affine scheme and giving two examples where the affine scheme is not a point. In this way, he

“In this way, he not only settles an algebraic question that could have been posed early last century, but gives a geometric structure that parametrizes the solutions.”

not only settles an algebraic question that could have been posed early last century, but gives a geometric structure that parametrizes the solutions.

Philippe Gille is currently the research director at the Institut Camille Jordan (Université Claude Bernard) in Lyon, France. In 1994 he completed his PhD at Université Paris-Sud XI - Orsay under the supervision of Jean-Louis Colliot-Thélène. He has worked at the École normale supérieure in Paris as a senior researcher and at the Centre national de la recherche scientifique (CNRS).

*Continued on page 172, please see G. de B Robinson Award*

de plans projectifs (Moufang 1933, Faulkner 1970). Les algèbres d'octonions sur un corps commutatif font partie des algèbres de Lie, des groupes de Lie et des groupes algébriques exceptionnels, de tous types. Par exemple, le groupe automorphique d'une algèbre d'octonions sur un corps est un groupe algébrique simple de type  $G_2$  qui définit une bijection entre les classes isomorphiques de deux types d'objets, un résultat obtenu essentiellement grâce à Springer. De plus, le fait que les algèbres d'octonions soient déterminées par la forme normale (Problème d'Hurwitz, résolu par Jacobson en 1958 et van der Blij-Springer en 1959), fournit un moyen de leur assigner des invariants cohomologiques, construits en fonction de la forme normale.

Avec la venue des groupes de Chevalley et de la théorie des schémas de Grothendieck, il devint naturel d'étudier les algèbres d'octonions sur un corps commutatif et d'étendre les résultats décrits plus haut dans cette configuration. Bien qu'il était connu depuis 1978 (Knus-Ojanguren-Sridharan) que les algèbres de quaternions

« De cette manière, non seulement il résout une question algébrique qui aurait pu être étudiée plus tôt, au siècle dernier, mais donne aussi une structure géométrique qui paramètre les solutions. »

sur anneaux sont déterminés par leurs formes normales, la question sur les algèbres d'octonions sur anneaux restait ouverte jusqu'à l'article de Gille. Dans cet article, Gille démontre de façon concluante que la propriété échoue, en général, par le paramétrage de l'échec à l'aide d'un schéma affine et à travers deux exemples où le schéma affine n'est pas un point. De cette manière, non seulement il résout une question algébrique qui aurait pu être étudiée plus tôt, au siècle dernier, mais donne aussi une structure géométrique qui paramètre les solutions.

*Suite à la page 172, veuillez consulter Prix G. de B. Robinson*

*G. de B. Robinson Award,  
continued from page 161*

Philippe Gille has published more than 40 research papers and co-authored the book *Central simple algebras and Galois cohomology* with Tamás Szamuely. He has also been involved in organizing several scientific events including the summer school “Introduction to group schemes” in Luminy, France, a special day in the memory of François Bruhat, and a session at the Second Canada-France Congress in Montréal, among others.

*Prix G. de B. Robinson,  
suite de la page 161*

Philippe Gille est actuellement le Directeur de Recherches à l'Institut Camille Jordan (Université Claude Bernard) à Lyon en France. Il a terminé son doctorat à l'Université Paris-Sud XI - Orsay en 1994, sous la supervision de Jean-Louis Colliot-Thélène. Il a travaillé à l'École normale supérieure de Paris en tant que Chercheur Senior et au Centre national de la recherche scientifique (CNRS).

Philippe Gille a effectué plus de 40 articles de recherches et a co-écrit le livre “Central simple algebras and Galois cohomology” avec Tamás Szamuely. Il a aussi participé à l'organisation de nombreux événements scientifiques, incluant l'école d'été intitulée “Introduction aux schémas de groupes” à Luminy en France, une journée en mémoire de François Bruhat, ainsi qu'une conférence au deuxième Congrès Canada-France à Montréal, parmi d'autres.