

Concours mathématique du lynx du Canada

Solutions définitives



Un concours de la Société mathématique du Canada.

Partie A : 5 points chacune

1. Si x est un entier positif tel que $x^2 = 13^2 - 4^2 - 3^2$, quelle est la valeur de x ?

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

Solution : On a

$$x^2 = 13^2 - 4^2 - 3^2 = 13 \times 13 - 4 \times 4 - 3 \times 3 = 169 - 16 - 9 = 144.$$

Puisque $x^2 = 144 = 12^2$ et que x est un entier positif, on doit avoir $x = 12$. On peut également résoudre ce problème en remarquant que $3^2 + 4^2 = 5^2$ et que $5^2 + 12^2 = 13^2$, qui correspondent aux deux plus petits « triplets pythagoriciens ». Il s'ensuit que

$$13^2 = 5^2 + 12^2 = (3^2 + 4^2) + 12^2,$$

d'où l'on constate que

$$12^2 = 13^2 - 4^2 - 3^2.$$

Une autre solution consiste à écrire

$$x^2 = 13^2 - 3^2 - 4^2 = (13-3)(13+3) - 4^2 = 10 \cdot 16 - 16 = 9 \cdot 16 = (3 \cdot 4)^2 = 12^2.$$

Réponse : (E)

2. Si $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{n}{12}$, quelle est la valeur de n ?

- (A) 9 (B) 13 (C) 19 (D) 25 (E) 29

Solution : Écrivons chacune des fractions avec 12 comme dénominateur.

Le membre de gauche est $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{6}{12} + \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{6+9+10}{12} = \frac{25}{12}$.

On a ainsi montré que cette équation se simplifie en $\frac{25}{12} = \frac{n}{12}$, d'où $n = 25$.

On peut également résoudre ce problème en multipliant les deux membres de l'équation par 12, ce qui donne

$$12 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{3}{4} + 12 \cdot \frac{5}{6} = n,$$

et donc

$$6 + 9 + 10 = n,$$

d'où $n = 25$.

Réponse : (D)

3. Soit $S = 2026 + 202,6 + 20,26 + 2,026$. Quel entier parmi les suivants est le plus près de S ?

- (A) 2050 (B) 2250 (C) 2450 (D) 2650 (E) 2850

Solution : Écrivons chacun des nombres avec trois décimales. En additionnant les quatre nombres, on obtient :

$$\begin{array}{r} 2026.000 \\ +202.600 \\ +20.260 \\ +2.026 \\ \hline = 2250.866 \end{array}$$

Parmi les cinq choix proposés, 2250 est l'entier le plus proche de $S = 2250.866$.

On peut également résoudre ce problème en estimant la somme S . On constate que les deux premiers nombres ont une somme d'environ $2000 + 200 = 2200$ et que S est légèrement supérieure à 2200 puisque les deux autres nombres contribuent peu à la somme S . Il s'ensuit que la réponse doit être le choix légèrement supérieur à 2200.

Réponse : **(B)**

4. La droite d'équation $y = 3x - 7$ coupe la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 7$ au point (a, b) . Quelle est la valeur de $\frac{b}{a}$?

(A) $\frac{2}{7}$

(B) $\frac{4}{5}$

(C) 1

(D) $\frac{5}{4}$

(E) $\frac{7}{2}$

Solution : Soit (a, b) le point d'intersection des deux droites. On a $b = 3a - 7$ et $b = -\frac{a}{2} + 7$.

Par conséquent, $3a - 7 = -\frac{a}{2} + 7$, ce qui donne $3a + \frac{a}{2} = 7 + 7$, soit $\frac{7a}{2} = 14$. En multipliant les deux membres par 2, on obtient $7a = 28$, soit $a = 4$. En substituant $a = 4$ dans l'équation $b = 3a - 7$, on trouve $b = 3 \cdot 4 - 7 = 12 - 7 = 5$, et donc $(a, b) = (4, 5)$ est le point d'intersection des deux droites. Il s'ensuit que

$$\frac{b}{a} = \frac{5}{4}.$$

On peut également obtenir la bonne réponse plus simplement, sans avoir à déterminer a et b . D'après ce qui précède, on a $b = 3a - 7$ et $b = -\frac{a}{2} + 7$. En additionnant les deux équations, on obtient

$$2b = 3a - \frac{a}{2} = \frac{5a}{2},$$

ce qui équivaut à

$$\frac{b}{a} = \frac{5}{4}.$$

Réponse : **(D)**

5. Soit $\{10, 12, 14, \dots, 94, 96, 98\}$ l'ensemble des entiers pairs à deux chiffres. Combien d'entiers pairs à deux chiffres contiennent le chiffre 6 ?

(A) 13

(B) 14

(C) 15

(D) 16

(E) 17

Solution : On cherche tous les nombres pairs à deux chiffres qui contiennent le chiffre 6.

Divisons notre analyse en deux cas : lorsque 6 est le premier chiffre et lorsqu'il est le dernier chiffre.

Il y a 5 possibilités lorsque 6 est le premier chiffre : 60, 62, 64, 66, 68.

Il y a 9 possibilités lorsque 6 est le dernier chiffre : 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96.

Cependant, remarquons que le nombre 66 apparaît dans les deux listes ; on doit donc nous assurer de ne pas le compter deux fois. Pour obtenir la bonne réponse, on additionne 5 et 9, puis on soustrait 1 pour tenir compte du nombre qui apparaît deux fois. (Il s'agit d'une illustration du principe d'inclusion-exclusion utilisé dans les problèmes de combinatoire.)

Par conséquent, la bonne réponse est

$$5 + 9 - 1 = 13.$$

Réponse : (A)

Partie B : 5 points chacune

1. La distance entre Toronto et Ottawa est exactement de 430 kilomètres. Sally a quitté Toronto à exactement 12 h et s'est dirigée vers Ottawa à une vitesse constante de 100 kilomètres à l'heure. Lorsqu'elle est passée devant un certain café Tim Hortons, elle a accéléré à 120 kilomètres à l'heure et a parcouru le reste du trajet à cette vitesse.

Si le trajet de Sally a duré 4 heures, à quelle heure Sally est-elle passée devant le café Tim Hortons ?

(A) 2 :00 (B) 2 :15 (C) 2 :30 (D) 2 :45 (E) 3 :00

Solution : Supposons que Sally atteigne le café après exactement x heures. Puisque son trajet de Toronto à Ottawa a duré exactement 4 heures, elle a roulé pendant x heures à 100 kilomètres à l'heure et pendant $4 - x$ heures à 120 kilomètres à l'heure.

Puisque la distance entre Toronto et Ottawa est de 430 kilomètres, on a

$$430 = 100x + 120(4 - x) = 100x + 480 - 120x = 480 - 20x,$$

ce qui se simplifie en $20x = 480 - 430 = 50$, soit

$$x = \frac{50}{20} = 2.5.$$

Ainsi, Sally a atteint le café exactement 2.5 heures après avoir commencé à conduire. Puisqu'elle a quitté Toronto à 12 h, elle est arrivée au Tim Hortons à 14 h 30.

Réponse : (C)

2. Il existe une unique valeur réelle de x telle que $4^x - 2^{x+2} = 12$. Quelle est la valeur de 8^x ?

(A) 36 (B) 64 (C) 108 (D) 128 (E) 216

Solution : Pour simplifier le problème, posons $2^x = a$. Remarquons que

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = 2^x \cdot 2^x = a \cdot a = a^2$$

et que

$$2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = a \cdot 4 = 4a.$$

Par conséquent, notre équation $4^x - 2^{x+2} = 12$ est équivalente à

$$a^2 - 4a = 12,$$

ce qui revient à

$$0 = a^2 - 4a - 12 = (a - 6)(a + 2).$$

Ainsi, $a = 6$ ou $a = -2$.

Puisque $a = 2^x$, où x est un nombre réel, a ne peut pas être négatif. Il s'ensuit que $a = 6$, ce qui implique que $2^x = 6$.

À ce stade, on peut déterminer x et montrer que $x = \log_2 6$. Cependant, ce n'est pas nécessaire, puisque la question demande la valeur de 8^x .

Puisque

$$8^x = (2^3)^x = 2^{3x} = (2^x)^3 = a^3,$$

on conclut que $8^x = 6^3 = 216$.

Réponse : (E)

3. Soit b un entier positif à deux chiffres. La droite $y = x + b$ coupe la parabole $y = x^2$ aux points P et Q . Si la longueur du segment PQ est $9\sqrt{2}$, quelle est la somme des chiffres de b ?

(A) 2

(B) 3

(C) 6

(D) 9

(E) 11

Solution : Puisque les points P et Q se trouvent sur la parabole $y = x^2$, on doit avoir $P = (p, p^2)$ et $Q = (q, q^2)$ pour certains nombres réels p et q . Supposons que $q > p$.

De plus, on nous dit que ces deux points se trouvent sur la droite $y = x + b$.

Par conséquent, $p^2 = p + b$ et $q^2 = q + b$.

En soustrayant la seconde équation de la première, on obtient

$$p^2 - q^2 = (p + b) - (q + b) = p - q,$$

ce qui implique

$$(p + q)(p - q) = p - q.$$

Par conséquent, soit $p + q = 1$, soit $p - q = 0$.

Si $p - q = 0$, alors P et Q représentent le même point et leur distance ne

peut donc pas être égale à $9\sqrt{2}$. Il s'ensuit que $p + q = 1$.

Déterminons maintenant p et q .

Une première méthode consiste à poser $q = 1 - p$, de sorte que $Q = (1 - p, (1 - p)^2)$, puis à utiliser la formule de la distance issue du théorème de Pythagore pour déterminer p . On sait que la distance entre les points $P = (p, p^2)$ et $Q = (1 - p, (1 - p)^2)$ est $9\sqrt{2}$, et donc

$$((1 - p) - p)^2 + ((1 - p)^2 - p^2)^2 = (9\sqrt{2})^2.$$

Cela se simplifie en

$$(1 - 2p)^2 + (1 - 2p)^2 = 81 \cdot 2 = 162,$$

ce qui donne

$$(1 - 4p + 4p^2) + (1 - 4p + 4p^2) = 162,$$

soit $8p^2 - 8p - 160 = 0$. En divisant les deux membres par 8 et en factorisant, on obtient

$$0 = p^2 - p - 20 = (p - 5)(p + 4),$$

et donc $p = 5$ ou $p = -4$.

Puisqu'on a supposé que $q > p$, on doit avoir $p = -4$, et donc $q = 1 - p = 5$. Par conséquent, les deux points ont pour coordonnées $(-4, 16)$ et $(5, 25)$.

Une solution beaucoup plus rapide consiste à remarquer que P et Q se trouvent sur la droite $y = x + b$, dont la pente est égale à 1. Par conséquent, si le segment PQ a une longueur de $9\sqrt{2}$, il doit être l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés ont pour longueurs 9, 9 et $9\sqrt{2}$. La distance horizontale entre P et Q est donc égale à 9, ce qui implique que $q - p = 9$.

On sait déjà que $p + q = 1$. En additionnant cette équation à $q - p = 9$, on obtient

$$(p + q) + (q - p) = 1 + 9,$$

ce qui implique $2q = 10$, soit $q = 5$. Puisque $p + q = 1$, on obtient $p = -4$ et on conclut, comme précédemment, que $P = (-4, 16)$ et $Q = (5, 25)$.

Enfin, puisque $y = x + b$ est l'équation de la droite passant par P et Q , on a $16 = -4 + b$ et $25 = 5 + b$, d'où $b = 20$. La somme des chiffres de b est donc $2 + 0 = 2$.

Réponse : (A)

4. Considérons une grille de 2 lignes et 3 colonnes.

Si l'on place au hasard les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans cette grille, quelle est la probabilité que le produit des nombres de chaque ligne soit pair ?

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{4}{5}$

(C) $\frac{5}{6}$

(D) $\frac{9}{10}$

(E) $\frac{19}{20}$

Solution : Soit p la probabilité que le produit des nombres de chacune des rangées soit pair. Alors $q = 1 - p$ est la probabilité que le produit des nombres d'au moins une rangée soit impair.

Il y a $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ façons de placer les six nombres dans la grille. L'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ contient trois nombres impairs et trois nombres pairs. Pour que le produit des nombres d'une rangée soit impair, les trois nombres impairs doivent se trouver dans une même rangée et les trois nombres pairs dans l'autre.

Voici un exemple dans lequel le produit des nombres d'une rangée est impair.

5	1	3
4	2	6

Il y a $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ façons de permuter les nombres impairs dans la rangée du haut et, de même, $3! = 6$ façons de permuter les nombres pairs dans la rangée du bas, ce qui donne $6 \times 6 = 36$ cas. De même, il y a $6 \times 6 = 36$ cas lorsque les nombres impairs se trouvent dans la rangée du bas et les nombres pairs dans celle du haut.

On conclut que

$$q = \frac{36 + 36}{6!} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10},$$

et donc $p = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

Une autre façon de compter les cas défavorables est la suivante : il y a 6 façons différentes de placer un nombre dans la case supérieure droite. Ensuite, les deux autres nombres de la rangée du haut doivent avoir la même parité que celui-ci (et peuvent être placés de 2×1 façons), tandis que les trois nombres restants doivent être placés (de $3 \times 2 \times 1$ façons) dans la deuxième rangée. Cela donne

$$6 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 72$$

cas dans lesquels le produit des nombres de l'une des rangées est impair.

Voici une solution beaucoup plus rapide : représentons les six nombres $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ par $\{I, I, I, P, P, P\}$, c'est-à-dire trois nombres impairs et trois nombres pairs.

Il y a

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{720}{6 \times 6} = 20$$

façons de choisir trois des six lettres pour former la rangée du haut de notre grille.

D'après le raisonnement précédent, la seule façon pour que le produit des nombres de l'une des rangées soit impair est que la rangée du haut soit III ou qu'elle soit PPP . Par conséquent,

$$q = \frac{1+1}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10},$$

et on conclut que

$$p = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

Réponse : (D)

5. Soit $f(x) = (x^2 + 4x + 3)(x^2 - 4x + 3)$. Parmi toutes les valeurs possibles de x , quelle est la plus petite valeur de $f(x)$?

(A) -16 (B) -15 (C) -9 (D) 0 (E) 9

Solution : Une façon possible de résoudre ce problème consiste à développer

$$f(x) = (x^2 + 4x + 3)(x^2 - 4x + 3)$$

et à utiliser le calcul différentiel pour déterminer la valeur de x qui minimise la fonction $f(x)$. Cependant, une façon beaucoup plus éclairante de résoudre ce problème consiste à exploiter la symétrie des deux facteurs dont le produit est $f(x)$.

Puisque $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$ et $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$, on a

$$f(x) = (x+1)(x+3)(x-1)(x-3) = (x+1)(x-1)(x+3)(x-3) = (x^2-1)(x^2-9).$$

Posons $a = x^2 - 5$. Alors,

$$f(x) = (x^2-1)(x^2-9) = x^4 - 10x^2 + 9 = x^4 - 10x^2 + 25 - 16 = (x^2-5)^2 - 16 = a^2 - 16.$$

Puisque, par définition, $a^2 \geq 0$, on voit que la fonction $f(x)$ atteint sa valeur minimale

$$0^2 - 16 = -16$$

précisément lorsque $a = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = \pm\sqrt{5}$.

On a montré que $f(x) = -16$ lorsque $x = \pm\sqrt{5}$ et que, pour toute autre valeur de x , $f(x) > -16$.

Réponse : (A)

Partie C : 6 points chacune

1. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ la fonction quadratique telle que $f(1) = 19$, $f(2) = 37$ et $f(3) = 61$.

Pour chaque entier positif n , définissons $S(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n)$. Par exemple, $S(3) = f(1) + f(2) + f(3) = 19 + 37 + 61 = 117$.

Quel est le plus petit entier n tel que $S(n) > 1\,000\,000$?

- (A) 98 (B) 99 (C) 100 (D) 101 (E) 102

Solution : On détermine d'abord la fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$. Puisqu'on sait que $f(1) = 19$, $f(2) = 37$ et $f(3) = 61$, on établit un système de trois équations à trois inconnues :

$$a + b + c = 19$$

$$4a + 2b + c = 37$$

$$9a + 3b + c = 61$$

En soustrayant la première équation de la deuxième, on obtient $3a + b = 18$. En soustrayant la deuxième équation de la troisième, on obtient $5a + b = 24$. D'après l'étape précédente, on voit que $b = 18 - 3a$ et $b = 24 - 5a$. Il s'ensuit que $18 - 3a = 24 - 5a$, ce qui implique $2a = 6$, soit $a = 3$. Puisque $a = 3$, on a $b = 18 - 3a = 18 - 9 = 9$ et $c = 19 - a - b = 19 - 3 - 9 = 7$. Par conséquent, notre fonction quadratique est

$$f(x) = 3x^2 + 9x + 7.$$

On peut maintenant déterminer $S(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n)$, qui est égal à :

$$S(n) = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 9(1 + 2 + 3 + \dots + n) + 7(1 + 1 + 1 + \dots + 1)$$

Mais, pour résoudre le problème de cette façon, on doit connaître les formules

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si nous connaissons ces formules, on obtient

$$S(n) = 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 9 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 7 \cdot n.$$

À partir de là, un calcul algébrique assez laborieux donne

$$S(n) = n^3 + 6n^2 + 12n.$$

Présentons maintenant une solution plus élégante. L'observation essentielle est que chaque terme $f(x)$ peut s'exprimer comme la différence de deux cubes consécutifs. On a

$$f(1) = 19 = 27 - 8 = 3^3 - 2^3,$$

$$f(2) = 37 = 64 - 27 = 4^3 - 3^3,$$

et

$$f(3) = 61 = 125 - 64 = 5^3 - 4^3.$$

En général,

$$f(x) = 3x^2 + 9x + 7 = (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = (x+2)^3 - (x+1)^3.$$

Puisque

$$S(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + f(n) = f(n) + f(n-1) + \dots + f(2) + f(1),$$

on a

$$\begin{aligned} S(n) &= f(n) + f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(2) + f(1) \\ &= [(n+2)^3 - (n+1)^3] + [(n+1)^3 - n^3] + [n^3 - (n-1)^3] + \\ &\quad \dots + [4^3 - 3^3] + [3^3 - 2^3] \\ &= (n+2)^3 - (n+1)^3 + (n+1)^3 - n^3 + n^3 - (n-1)^3 + \\ &\quad \dots + 4^3 - 3^3 + 3^3 - 2^3 \\ &= (n+2)^3 - 2^3 \end{aligned}$$

Cette technique est connue sous le nom de *somme télescopique* : les termes intermédiaires s'annulent deux à deux, de sorte que la somme se réduit à la différence entre le premier et le dernier terme.

Puisque $S(n) = (n + 2)^3 - 2^3$, on constate que

$$S(98) = 100^3 - 2^3$$

est légèrement inférieur à $100^3 = 1\,000\,000$, tandis que

$$S(99) = 101^3 - 2^3$$

est certainement supérieur à $1\,000\,000$.

Par conséquent, $n = 99$ est le plus petit entier n pour lequel

$$S(n) > 1\,000\,000.$$

Réponse : (B)

2. Soit $S = 2^{2026} + 0^{2026} + 2^{2026} + 6^{2026}$. Quels sont les deux derniers chiffres de S ?

(A) 04

(B) 24

(C) 44

(D) 64

(E) 84

Solution : Pour déterminer les deux derniers chiffres de S , on calcule les deux derniers chiffres de chacun des termes de cette somme.

La première affirmation est que tous les éléments de $\{2^6, 2^{26}, 2^{46}, 2^{66}, \dots\}$ ont les mêmes deux derniers chiffres. Autrement dit,

$$2^{20n+6} \equiv 2^{20(n+1)+6} \pmod{100}$$

pour tout entier $n \geq 0$.

Pour montrer que $2^{20n+6} \equiv 2^{20(n+1)+6} \pmod{100}$ pour tout entier $n \geq 0$, il suffit de montrer que $2^{20(n+1)+6} - 2^{20n+6}$ est toujours un multiple de 100.

Cette différence se simplifie comme suit :

$$\begin{aligned} 2^{20(n+1)+6} - 2^{20n+6} &= 2^{20n+6} \cdot (2^{20} - 1) \\ &= 2^{20n+4} \cdot 2^2 \cdot (2^{10} + 1) \cdot (2^{10} - 1) \\ &= 2^{20n+4} \cdot 4 \cdot (1024 + 1) \cdot (2^{10} - 1) \\ &= 2^{20n+4} \cdot 4 \cdot 1025 \cdot (2^{10} - 1) \\ &= 2^{20n+4} \cdot 4100 \cdot (2^{10} - 1) \end{aligned}$$

Puisque cette différence est un multiple de 4100, elle est également un multiple de 100. Cela démontre l'affirmation. Ainsi, les deux derniers chiffres de 2^{2026} sont 64, puisque $2^6 = 64$.

La deuxième affirmation est que la suite $6^2, 6^3, 6^4, 6^5, 6^6, 6^7, \dots$ présente le motif périodique suivant pour ses deux derniers chiffres :

$$36, 16, 96, 76, 56, 36, \dots$$

Pour le justifier, montrons maintenant que

$$6^{n+5} \equiv 6^n \pmod{100}$$

pour tout entier $n \geq 2$.

Pour montrer que $6^{n+5} \equiv 6^n \pmod{100}$ pour tout entier $n \geq 2$, il suffit de montrer que $6^{n+5} - 6^n$ est un multiple de 100. Cette différence se simplifie comme suit :

$$\begin{aligned} 6^{n+5} - 6^n &= 6^n \cdot (6^5 - 1) \\ &= 6^{n-2} \cdot 6^2 \cdot (6^5 - 1) \\ &= 6^{n-2} \cdot 6^2 \cdot (6^5 - 1) \\ &= 6^{n-2} \cdot 9 \cdot 4 \cdot (7776 - 1) \\ &= 6^{n-2} \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7775 \\ &\equiv 6^{n-2} \cdot 9 \cdot 4 \cdot 75 \pmod{100} \\ &\equiv 6^{n-2} \cdot 9 \cdot 300 \pmod{100} \\ &\equiv 6^{n-2} \cdot 9 \cdot 0 \pmod{100} \\ &\equiv 0 \pmod{100} \end{aligned}$$

On peut également montrer que $6^{n+5} - 6^n = 6^n(6^5 - 1)$ est un multiple de 100 de la façon suivante : pour tout $n \geq 2$, 6^n est un multiple de 4. Il suffit donc de montrer que $6^5 - 1$ est un multiple de 25, ce qu'on peut faire à l'aide du binôme de Newton :

$$(5 + 1)^5 - 1 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 5^k - 1 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 5^k - \binom{5}{0} = \sum_{k=1}^5 \binom{5}{k} 5^k.$$

Pour chaque $k \geq 1$, le terme $\binom{5}{k} 5^k$ est divisible par 25, ce qui démontre l'affirmation.

Par conséquent, on a montré que 6^{2026} a les mêmes deux derniers chiffres que 6^6 , et

$$6^6 = 6^3 \cdot 6^3 = 216 \cdot 216 \equiv 16 \cdot 16 = 256 \equiv 56 \pmod{100}.$$

On conclut que

$$\begin{aligned} S &= 2^{2026} + 0^{2026} + 2^{2026} + 6^{2026} \\ &\equiv 64 + 0 + 64 + 56 \pmod{100} \\ &\equiv 184 \pmod{100} \\ &\equiv 84 \pmod{100} \end{aligned}$$

On a montré que les deux derniers chiffres de S sont 84.

Réponse : (E)

3. Soient p et q des nombres réels positifs. Les points $(0, 0)$, $(p, 1)$ et $(2, q)$ forment un triangle équilatéral.

L'aire de ce triangle est de A unités carrées. Quelle est la valeur de A , arrondie à l'entier le plus près ?

(A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 15 (E) 17

Solution : Notons les trois points $O = (0, 0)$, $P = (p, 1)$ et $Q = (2, q)$. Puisque le triangle $\triangle OPQ$ est équilatéral, on a $OP^2 = OQ^2$, ce qui implique

$$(p - 0)^2 + (1 - 0)^2 = (2 - 0)^2 + (q - 0)^2.$$

Cela se simplifie en $p^2 + 1 = 4 + q^2$, soit

$$p^2 = q^2 + 3.$$

De plus, on a $OP^2 = PQ^2$, ce qui implique

$$(p - 0)^2 + (1 - 0)^2 = (2 - p)^2 + (q - 1)^2.$$

Cela se simplifie en

$$p^2 + 1 = 4 - 4p + p^2 + q^2 - 2q + 1,$$

soit

$$4p = q^2 - 2q + 4.$$

D'après les deux équations précédentes, on a

$$(q^2 - 2q + 4)^2 = (4p)^2 = 16p^2 = 16(q^2 + 3).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (q^2 - 2q + 4)^2 &= 16(q^2 + 3) \\ ((q^2 + 4) - 2q)^2 &= 4q^2 + 12q^2 + 48 \\ (q^2 + 4)^2 - 4q(q^2 + 4) + 4q^2 &= 4q^2 + 12(q^2 + 4) \\ (q^2 + 4)^2 - 4q(q^2 + 4) - 12(q^2 + 4) &= 0 \\ (q^2 + 4)(q^2 + 4 - 4q - 12) &= 0 \\ (q^2 + 4)(q^2 - 4q - 8) &= 0 \end{aligned}$$

Puisque q est un nombre réel positif, il est impossible que $q^2 + 4 = 0$. Par conséquent,

$$q^2 - 4q - 8 = 0,$$

et la formule quadratique nous donne

$$q = 2 + \sqrt{12} = 2 + 2\sqrt{3},$$

puisque l'on sait que $q > 0$.

À ce stade, on peut substituer $q = 2 + 2\sqrt{3}$ dans l'équation $4p = q^2 - 2q + 4$ pour montrer que $p = 4 + \sqrt{3}$, mais on peut résoudre ce problème sans calculer la valeur de p .

Soit x la longueur d'un côté du triangle $\triangle OPQ$. En traçant la hauteur de ce triangle et en appliquant le théorème de Pythagore, on montre facilement que cette hauteur est égale à $\frac{\sqrt{3}x}{2}$. Ainsi, l'aire de ce triangle équilatéral est

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

Puisque $x = OQ$, on a, par définition,

$$x^2 = OQ^2 = 4 + q^2 = 4 + (2 + 2\sqrt{3})^2 = 4 + (4 + 8\sqrt{3} + 12) = 20 + 8\sqrt{3}.$$

Par conséquent, l'aire de ce triangle est

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(20 + 8\sqrt{3}) = 5\sqrt{3} + 6.$$

Puisque $\sqrt{3}$ vaut approximativement 1.73, l'aire du triangle est approximativement

$$5\sqrt{3} + 6 = 5 \times 1.73 + 6 = 8.65 + 6 = 14.65,$$

ce qui s'arrondit à 15.

Bien que la solution ci-dessus soit correcte, voici une solution astucieuse faisant intervenir les nombres complexes. On représente chaque coordonnée bidimensionnelle (a, b) par le vecteur $a + bi$, où i est le nombre complexe satisfaisant $i^2 = -1$. On définit

$$\text{cis}(\theta) = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta).$$

Soit

$$OP = p + 1 \cdot i = x \cdot \text{cis}(\theta).$$

Alors

$$OQ = 2 + q \cdot i = x \cdot \text{cis}(\theta + 60^\circ) = x \cdot \text{cis}(\theta) \cdot \text{cis}(60^\circ).$$

Il s'ensuit que

$$2 + q \cdot i = x \cdot \text{cis}(\theta) \cdot \text{cis}(60^\circ) = (p + 1 \cdot i)(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = (p + 1 \cdot i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right).$$

En développant le membre de droite, on obtient

$$2 + q \cdot i = \frac{p}{2} + \frac{1}{2} \cdot i + \frac{\sqrt{3}p}{2} \cdot i - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on obtient $2 = \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $q = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}p}{2}$. Cela nous donne

$$p = 4 + \sqrt{3},$$

d'où

$$q = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}p}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(4 + \sqrt{3}) = 2 + 2\sqrt{3}.$$

À partir de là, on procède comme ci-dessus pour montrer que l'aire du triangle est approximativement

$$5\sqrt{3} + 6 = 5 \times 1.73 + 6 = 8.65 + 6 = 14.65,$$

ce qui s'arrondit à 15.

Réponse : (D)

4. Considérons une grille 3×3 dont chaque case contient un entier positif.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Dans cette grille, le produit des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale est égal à la constante P .

Soit S la somme de ces neuf nombres.

Si la grille est constituée de neuf entiers positifs *distincts*, tous inférieurs à 2026, quelle est la plus petite valeur possible de $\frac{S}{\sqrt[3]{P}}$, arrondie à deux décimales ?

(A) 9.01 (B) 9.15 (C) 9.17 (D) 9.19 (E) 9.21

Solution : Puisque le produit des nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale est égal à la constante P , on a

$$P = def = beh = aei = ceg.$$

Il s'ensuit que

$$P^4 = (def)(beh)(aei)(ceg) = (abcdefghi) \cdot e^3.$$

Puisque le produit des nombres de chaque rangée est égal à P , on a

$$P = abc = def = ghi,$$

et donc

$$P^3 = (abc)(def)(ghi) = abcdefghi.$$

D'après les deux équations précédentes, on a

$$P^4 = (abcdefghi) \cdot e^3 = P^3 \cdot e^3,$$

ce qui implique

$$P = e^3.$$

Posons $a = ex$ et $c = ey$, où x et y sont des nombres réels. Puisque le produit des nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale est égal à $P = e^3$, on peut rapidement déterminer chacune des entrées de notre grille en fonction de x et de y .

ex	$\frac{e}{xy}$	ey
$\frac{ey}{x}$	e	$\frac{ex}{y}$
$\frac{e}{y}$	exy	$\frac{e}{x}$

En notant S la somme de ces neuf nombres, on a

$$\begin{aligned}
 S &= ex + \frac{e}{xy} + ey + \frac{ey}{x} + e + \frac{ex}{y} + \frac{e}{y} + exy + \frac{e}{x} \\
 &= e\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) + ey\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) + \frac{e}{y}\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) \\
 &= e\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)\left(1 + y + \frac{1}{y}\right).
 \end{aligned}$$

Ainsi, la quantité que l'on souhaite minimiser, $\frac{S}{\sqrt[3]{P}}$, est égale à

$$\frac{S}{e} = \left(1 + x + \frac{1}{x}\right) \left(1 + y + \frac{1}{y}\right).$$

Il est facile de vérifier que

$$z + \frac{1}{z} \geq 2$$

pour tout nombre réel z , avec égalité si et seulement si $z = 1$. On peut le montrer en appliquant l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique (AM-GM), ou en montrant que l'inégalité ci-dessus est équivalente à

$$(z - 1)^2 \geq 0.$$

Par conséquent,

$$\frac{S}{e} = \left(1 + x + \frac{1}{x}\right) \left(1 + y + \frac{1}{y}\right) \geq (1+2)(1+2) = 9.$$

Plus x et y sont proches de 1, plus $\frac{S}{e}$ est proche de 9. Si les neuf entrées de la grille pouvaient toutes être égales au même nombre, on aurait $\frac{S}{e} = 9$. Cependant, puisque les entrées de la grille sont neuf entiers *distincts*, la quantité $\frac{S}{e}$ est strictement supérieure à 9.

Avant de déterminer la valeur minimale exacte de $\frac{S}{e}$, considérons un exemple pour illustrer la démonstration qui suivra.

Supposons que $x = \frac{3}{2}$ et $y = \frac{4}{3}$. Alors

$$\frac{S}{e} = \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right) \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{3}{4}\right) = \frac{19}{6} \cdot \frac{37}{12},$$

ce qui est approximativement égal à 9.76. Les neuf entrées de notre grille sont

$\frac{3e}{2}$	$\frac{e}{2}$	$\frac{4e}{3}$
$\frac{8e}{9}$	e	$\frac{9e}{8}$
$\frac{3e}{4}$	$2e$	$\frac{2e}{3}$

Enfin, on choisit pour e n'importe quel nombre qui garantit que les neuf entrées sont des *entiers*. Par exemple, si on prend $e = 72$, notre grille finale est :

108	36	96
64	72	81
54	144	48

L'intuition est la suivante : on choisit x et y aussi proches que possible de 1 ; cela garantira que la quantité que l'on cherche à minimiser, $\frac{S}{e}$, soit aussi

proche que possible de 9. Cependant, on doit s'assurer que les neuf entrées de notre grille sont des entiers positifs *inférieurs* à 2026. Ainsi, lorsque l'on trouve une valeur de e qui rend toutes les entrées entières, on doit s'assurer que la plus grande d'entre elles est inférieure à 2026.

Posons $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{r}{s}$. Sans perte de généralité, supposons que $p \geq r$, $p > q$ et $r > s$. Supposons également que x et y sont écrits sous forme irréductible, c'est-à-dire que

$$\text{pgcd}(p, q) = \text{pgcd}(r, s) = 1.$$

On affirme que e doit être un multiple de $pqrs$. (Autrement dit, $e = pqrs$ est la plus petite valeur de e qui garantit que les neuf entrées sont des entiers.)

Pour justifier cette affirmation, soit v un nombre premier. Puisque $\text{pgcd}(p, q) = 1$, le nombre premier v peut diviser p ou q , mais pas les deux. Supposons que w_1 soit la multiplicité de v dans p ou q . (Autrement dit, v^{w_1} divise p ou q , mais v^{w_1+1} ne le divise pas.) De même, soit w_2 la multiplicité de v dans r ou s .

La grille comporte neuf entrées distinctes, parmi lesquelles

$$b = \frac{e}{xy} = \frac{eqs}{pr}, \quad d = \frac{ey}{x} = \frac{eqr}{ps}, \quad f = \frac{ex}{y} = \frac{eps}{qr},$$

et

$$h = exy = \frac{epr}{qs}.$$

En considérant les quatre dénominateurs qs , ps , qr et pr , on sait que l'un d'eux est un multiple de $v^{w_1+w_2}$.

Par exemple, supposons que $h = exy = \frac{epr}{qs}$ soit la fraction dont le dénominateur est un multiple de $v^{w_1+w_2}$. Puisque $\text{pgcd}(p, q) = 1$ et $\text{pgcd}(r, s) = 1$, la seule façon pour que h soit un entier est que e soit un multiple de $v^{w_1+w_2}$. Le même raisonnement s'applique à chacune des autres entrées b , d et f .

La multiplicité de v dans pq est w_1 , et la multiplicité de v dans rs est w_2 . Par conséquent, la multiplicité de v dans $pqrs$ est $w_1 + w_2$. D'après le paragraphe précédent, on a montré que la multiplicité de v dans e est *au moins* égale à $w_1 + w_2$.

Puisque cette affirmation vaut pour *tous* les nombres premiers apparaissant dans la factorisation de $pqrs$, on conclut que e doit être un multiple de $pqrs$.

Comme on veut que toutes nos entrées soient aussi petites que possible, il est naturel de simplement poser $e = pqrs$ et de s'assurer que les valeurs de p, q, r, s sont suffisamment petites pour que toutes les entrées de notre grille soient inférieures à 2026. La grille devient

p^2rs	q^2s^2	pqr^2
q^2r^2	$pqrs$	p^2s^2
pqs^2	p^2r^2	q^2rs

Rappelons que l'on a supposé que $p \geq r$, $p > q$ et $r > s$. Cela signifie que la plus grande entrée de notre grille est

$$p^2r^2 = (pr)^2,$$

et on sait qu'elle doit être inférieure à $2026 > 2025 = 45^2$. Ainsi,

$$pr \leq 45.$$

Pour que la quantité

$$\frac{S}{e} = \left(1 + \frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) \left(1 + \frac{r}{s} + \frac{s}{r}\right)$$

soit aussi proche que possible de 9, on veut que les fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ soient aussi proches que possible de 1. Il s'ensuit que l'on veut $q = p - 1$ et $s = r - 1$.

Pour que les fractions

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1} \quad \text{et} \quad \frac{r}{s} = \frac{r}{r-1} = 1 + \frac{1}{r-1}$$

soient aussi proches que possible de 1, on veut que p et r soient aussi grands que possible, tout en respectant la condition $pr \leq 45$.

Puisque l'on suppose que $p \geq r$, cela implique que la paire (p, r) recherchée doit être $(9, 5)$ ou $(7, 6)$. Toute autre possibilité, comme $(9, 4)$, $(9, 3)$, $(8, 5)$, $(8, 4)$ ou $(7, 5)$, donne nécessairement une valeur de $\frac{S}{e}$ supérieure à celle obtenue avec $(9, 5)$ ou $(7, 6)$.

Dans le cas $(p, r) = (9, 5)$, on a $x = \frac{9}{8}$ et $y = \frac{5}{4}$, ce qui donne

$$\frac{S}{e} = \left(1 + \frac{9}{8} + \frac{8}{9}\right) \left(1 + \frac{5}{4} + \frac{4}{5}\right) = \frac{13237}{1440},$$

soit 9.19 lorsqu'on arrondit à deux décimales.

Dans le cas $(p, r) = (7, 6)$, on a $x = \frac{7}{6}$ et $y = \frac{6}{5}$, ce qui donne

$$\frac{S}{e} = \left(1 + \frac{7}{6} + \frac{6}{7}\right) \left(1 + \frac{6}{5} + \frac{5}{6}\right) = \frac{11557}{1260},$$

soit 9.17 lorsqu'on arrondit à deux décimales.

Par conséquent, la bonne réponse doit être 9.17. On peut vérifier que, dans le cas $(p, q, r, s) = (7, 6, 6, 5)$, chacune des entrées de la grille est inférieure à 2026.

1470	900	1512
1296	1260	1225
1050	1764	1080

Réponse : (C)

5. L'hexagone $ABCDEF$ est inscrit dans un cercle. Cet hexagone possède la propriété que $AB = BC = CD$ et $DE = EF = FA$.

Sachant que les longueurs AB , AC , AD , AE et AF sont toutes des entiers, quelle est la plus petite valeur possible de $|BE - AD|$?

(A) 1 (B) 15 (C) 16 (D) 32 (E) 64

Solution : Posons $AB = BC = CD = p$ et $DE = EF = FA = q$. D'après l'énoncé du problème, on sait que p et q sont des entiers positifs.

Soit O le centre du cercle, et posons $\angle AOB = x$. Si l'on trace les six rayons reliant O à chacun des six sommets de l'hexagone, on constate que

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = x$$

et que

$$\angle DOE = \angle EOF = \angle FOA = 120^\circ - x.$$

Puisque les triangles $\triangle OAF$ et $\triangle OAB$ sont isocèles, on a

$$\angle OAF = \angle OFA = 30^\circ + \frac{x}{2}$$

et

$$\angle OAB = \angle OBA = 90^\circ - \frac{x}{2}.$$

Par conséquent,

$$\angle FAB = \angle OAF + \angle OAB = \left(30^\circ + \frac{x}{2}\right) + \left(90^\circ - \frac{x}{2}\right) = 120^\circ.$$

En appliquant la loi des cosinus au triangle $\triangle BAF$, on obtient

$$\cos 120^\circ = \frac{p^2 + q^2 - BF^2}{2pq}.$$

Puisque $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, il s'ensuit que

$$BF^2 = p^2 + pq + q^2.$$

Par symétrie,

$$BF^2 = CE^2.$$

Quatre sommets quelconques de l'hexagone forment un *quadrilatère cyclique*. On applique maintenant le théorème de Ptolémée afin d'exprimer AC , AD et AE en fonction de p et de q .

En appliquant le théorème de Ptolémée au quadrilatère $BCEF$, on obtient

$$\begin{aligned} BF \cdot CE + BC \cdot FE &= BE \cdot CF \\ BF \cdot BF + p \cdot q &= BE^2 \quad \text{puisque } BE = CF \text{ par symétrie} \\ (p^2 + pq + q^2) + pq &= BE^2 \\ (p + q)^2 &= BE^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$BE = CF = p + q.$$

En appliquant le théorème de Ptolémée au quadrilatère $ABEF$, on obtient

$$\begin{aligned} AF \cdot BE + AB \cdot FE &= AE \cdot BF \\ q(p + q) + pq &= AE \sqrt{p^2 + pq + q^2} \\ q(2p + q) &= AE \sqrt{p^2 + pq + q^2} \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$AE = \frac{q(2p + q)}{\sqrt{p^2 + pq + q^2}}.$$

En appliquant de façon analogue le théorème de Ptolémée au quadrilatère $ABCF$, on obtient

$$AC = \frac{p(2q + p)}{\sqrt{p^2 + pq + q^2}}.$$

Remarquons que, par symétrie, $AC = BD$. Enfin, en appliquant le théorème de Ptolémée au quadrilatère $ABCD$, on obtient

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + BC \cdot AD &= AC \cdot BD \\ p \cdot p + p \cdot AD &= AC^2 \\ p^2 + p \cdot AD &= \frac{p^2(2q + p)^2}{p^2 + pq + q^2} \\ p + AD &= \frac{p(2q + p)^2}{p^2 + pq + q^2} \\ AD &= \frac{p(2q + p)^2}{p^2 + pq + q^2} - p = p \left(\frac{(2q + p)^2}{p^2 + pq + q^2} - 1 \right) \\ AD &= p \left(\frac{4q^2 + 4qp + p^2}{p^2 + pq + q^2} - \frac{p^2 + pq + q^2}{p^2 + pq + q^2} \right) \\ AD &= p \left(\frac{3q^2 + 3qp}{p^2 + pq + q^2} \right) = \frac{3pq(p + q)}{p^2 + pq + q^2} \end{aligned}$$

On sait que $AB = p$ et $AF = q$ ont des longueurs entières, tout comme AC , AD et AE . D'après les formules pour AC et AE , on sait que $p^2 + pq + q^2$

doit être un carré parfait.

À titre d'exemple, supposons que $p = 3$ et $q = 5$, de sorte que

$$p^2 + pq + q^2 = 9 + 15 + 25 = 49 = 7^2.$$

En substituant ces valeurs de p et de q dans les formules obtenues ci-dessus, on peut montrer que

$$(AB, AC, AD, AE, AF) = \left(3, \frac{39}{7}, \frac{360}{49}, \frac{55}{7}, 5\right).$$

On veut que chacun des nombres de ce quintuplet soit un entier. La façon la plus simple d'y parvenir consiste à multiplier p et q par 49. Si on substitut $p = 3 \cdot 49 = 147$ et $q = 5 \cdot 49 = 245$ dans les formules obtenues ci-dessus, on peut montrer que

$$(AB, AC, AD, AE, AF) = (147, 273, 360, 385, 245).$$

Pour ces deux valeurs de p et de q , on a $AD = 360$ et

$$BE = p + q = 147 + 245 = 392.$$

Ainsi, $|BE - AD|$ est égal à 32.

Mais peut-on faire mieux? On va maintenant montrer que la plus petite valeur possible de $|BE - AD|$ est 15.

Posons $p = ka$ et $q = kb$, où $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Alors

$$BE = p + q = k(a + b)$$

et

$$AD = \frac{3kab(a+b)}{a^2 + ab + b^2} = 3k \cdot \frac{ab(a+b)}{a^2 + ab + b^2}.$$

Puisque $\text{pgcd}(a, b) = 1$, il est facile de vérifier que a et b sont chacun premiers avec $a^2 + ab + b^2$. On montre maintenant que $a + b$ est également premier avec $a^2 + ab + b^2$.

D'après l'algorithme d'Euclide,

$$\text{pgcd}(a^2 + ab + b^2, a + b) = \text{pgcd}((a + b)^2 - ab, a + b) = \text{pgcd}(ab, a + b).$$

Si un nombre premier r divise ab , alors r divise soit a , soit b , mais pas les deux. Ainsi, r est un diviseur de ab , mais ne peut pas être un diviseur de $a + b$. Il s'ensuit que

$$\text{pgcd}(ab, a + b) = 1,$$

ce qui implique que $a + b$ est premier avec $a^2 + ab + b^2$.
On a donc montré que

$$AD = 3k \cdot \frac{ab(a+b)}{a^2 + ab + b^2}$$

ne peut être un entier que si $3k$ est un multiple de $a^2 + ab + b^2$.
Cela implique que

$$k \geq \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

si $a^2 + ab + b^2$ est un multiple de 3, et que

$$k \geq a^2 + ab + b^2$$

si $a^2 + ab + b^2$ n'est pas un multiple de 3.
D'après nos formules pour BE et AD , on a

$$\begin{aligned} BE - AD &= k(a+b) - 3k \cdot \frac{ab(a+b)}{a^2 + ab + b^2} \\ &= k(a+b) \left(1 - \frac{3ab}{a^2 + ab + b^2} \right) \\ &= \frac{k(a+b)(a-b)^2}{a^2 + ab + b^2}. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, si $a^2 + ab + b^2$ est un multiple de 3, alors

$$\begin{aligned} |BE - AD| &= BE - AD \\ &= \frac{k(a+b)(a-b)^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2) \frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2 + ab + b^2} \\ &= \frac{(a+b)(a-b)^2}{3}. \end{aligned}$$

Et si $a^2 + ab + b^2$ n'est pas un multiple de 3, alors

$$\begin{aligned} |BE - AD| &= BE - AD \\ &= \frac{k(a+b)(a-b)^2}{a^2 + ab + b^2} \geq (a^2 + ab + b^2) \frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2 + ab + b^2} \\ &= (a+b)(a-b)^2. \end{aligned}$$

Pour achever la démonstration, il suffit de trouver des entiers positifs a et b , avec $\text{pgcd}(a, b) = 1$, tels que

$$p^2 + pq + q^2 = k^2(a^2 + ab + b^2)$$

soit un carré parfait. L'objectif est de rendre $|BE - AD|$ aussi petit que possible. Sans perte de généralité, supposons que $a < b$. Dans notre exemple précédent, si $a = 3$ et $b = 5$, alors

$$a^2 + ab + b^2 = 9 + 15 + 25 = 49 = 7^2.$$

Puisque 7^2 n'est pas un multiple de 3, on a

$$|BE - AD| \geq (a + b)(a - b)^2 = (3 + 5)(3 - 5)^2 = 32.$$

Si $b - a = 1$, une vérification directe montre que $(a, b) = (7, 8)$ est la plus petite paire pour laquelle $a^2 + ab + b^2$ est un carré parfait. En effet,

$$a^2 + ab + b^2 = 49 + 56 + 64 = 169 = 13^2.$$

Puisque 13^2 n'est pas un multiple de 3, on a

$$|BE - AD| \geq (a + b)(a - b)^2 = (7 + 8)(7 - 8)^2 = 15.$$

L'égalité est atteinte lorsque $k = a^2 + ab + b^2 = 169$.

On montre maintenant que la plus petite valeur possible de $|BE - AD|$ est 15.

Si $b - a = 1$, on constate que $a \geq 7$ pour que $a^2 + ab + b^2$ soit un carré parfait. Si $a > 7$, alors

$$|BE - AD| \geq (a + b)(a - b)^2 = (2a + 1) \cdot 1^2 = 2a + 1 > 15.$$

Si $b - a = 2$, alors

$$\begin{aligned} a^2 + ab + b^2 &= a^2 + a(a + 2) + (a + 2)^2 \\ &= a^2 + a^2 + 2a + a^2 + 4a + 4 \\ &= 3a^2 + 6a + 4 \\ &= 3(a + 1)^2 + 1. \end{aligned}$$

Puisque cette quantité ne peut pas être un multiple de 3, on a

$$|BE - AD| \geq (a + b)(a - b)^2 = (a + a + 2)(2)^2 = (2a + 2) \cdot 4 = 8a + 8.$$

Puisque $a \geq 1$, on a $|BE - AD| \geq 16$.

Si $b - a = 3$, le cas $(a, b) = (1, 4)$ ne donne pas un carré parfait pour $a^2 + ab + b^2$.

Ainsi, $a \geq 2$ et $b \geq 5$. De plus,

$$|BE - AD| \geq \frac{(a+b)(a-b)^2}{3} \geq \frac{(2+5)(3)^2}{3} = 21 > 15.$$

Enfin, si $b - a \geq 4$, alors

$$|BE - AD| \geq \frac{(a+b)(a-b)^2}{3} \geq \frac{(1+5)(4)^2}{3} > 15.$$

On conclut que la valeur minimale de $|BE - AD|$ est 15, et qu'elle est atteinte lorsque $a = 7$, $b = 8$ et

$$k = a^2 + ab + b^2 = 49 + 56 + 64 = 169 = 13^2.$$

Comme

$$p = ka = 169 \cdot 7 = 1183$$

et

$$q = kb = 169 \cdot 8 = 1352,$$

on obtient

$$(AB, AC, AD, AE, AF) = (1183, 2093, 2520, 2288, 1352).$$

Puisque

$$BE = p + q = 1183 + 1352 = 2535,$$

on conclut que

$$|BE - AD| = 2535 - 2520 = 15,$$

comme prévu.

Réponse : (B)