

**J1.** Soient  $a, b$  et  $c$  des entiers strictement positifs *distincts* tels que  $a + b + c = 29$ .

Quelle est la plus petite valeur possible de  $a^2 + b^2 + c^2$  ?

**J2.** Considérons un trapèze  $ABCD$ , où les côtés  $AB$  et  $CD$  sont parallèles. On se donne des points  $W, X, Y$  et  $Z$  tels que  $BCWX$  et  $ADYZ$  soient des losanges, et que les intérieurs des trois quadrilatères  $ABCD$ ,  $BCWX$  et  $ADYZ$  soient disjoints.

Montrez que la distance entre les centres de  $BCWX$  et  $ADYZ$  est au plus égale à la moitié du périmètre de  $ABCD$ .

*Remarque :* Le centre d'un losange est le point d'intersection de ses diagonales.

**J3.** Soient  $a, b \geq 2$  des entiers premiers entre eux. Soit  $S$  l'ensemble des points du plan à coordonnées entières situés strictement à l'intérieur du triangle de sommets  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$  et  $(0, b)$ .

Déterminez, avec preuve,

$$\sum_{(x,y) \in S} (a - 2x)(b - 2y)$$

en fonction de  $a$  et  $b$ .

*Remarque :* Ici, la sommation signifie que l'on additionne la valeur  $(a - 2x)(b - 2y)$  pour tous les points  $(x, y)$  appartenant à  $S$ .

**J4.** Il existe  $n$  types de pièces dans la mine d'or de Wario. Chaque pièce du  $i$ -ième type vaut  $d_i$  cents, où  $d_1, \dots, d_n$  sont des entiers strictement positifs distincts. Un entier strictement positif  $D$  est dit *chanceux* si la propriété suivante est satisfaite : pour tout entier strictement positif  $k$ , toute collection de pièces (contenant un nombre arbitraire de pièces de chaque type) dont la valeur totale est exactement  $kD$  cents peut être séparée en  $k$  groupes, chacun d'une valeur de  $D$  cents.

Un nombre chanceux existe-t-il nécessairement ?

**J5.** Turbo l'escargot joue à un jeu sur un plateau comportant  $2n$  lignes et  $2n$  colonnes. Il y a  $2n^2$  monstres qui commencent par occuper  $2n^2$  cases distinctes, ce que Turbo sait. Après cela, Turbo choisit une case quelconque et l'étiquette 1. À partir de cette case, Turbo parcourt ensuite toutes les autres  $4n^2 - 1$  cases exactement une fois, en les étiquetant successivement  $2, 3, \dots, 4n^2$ . Turbo ne se déplace qu'entre des cases partageant un côté et ne revient jamais sur une case déjà visitée.

Le pointage final est la somme des étiquettes des cases contenant des monstres. Les monstres cherchent à se placer de manière à maximiser le pointage, tandis que Turbo cherche à le minimiser en fonction des positions des monstres.

Déterminez, en fonction de  $n$ , le plus grand pointage que les monstres peuvent garantir.