Olympiade mathématique du Canada
Ensemble de problèmes officiel 2026

P1. Soient $a, b \geq 2$ des entiers premiers entre eux. Soit S l'ensemble des points du plan à coordonnées entières situés strictement à l'intérieur du triangle de sommets $(0,0)$, $(a,0)$ et $(0,b)$.

Déterminez, avec preuve,
$$\sum_{(x,y)\in S} (a-2x)(b-2y)$$
en fonction de a et b.

Remarque : Ici, la sommation signifie que l'on additionne la valeur $(a-2x)(b-2y)$ pour tous les points (x,y) appartenant à S.

P2. Il existe n types de pièces dans la mine d'or de Wario. Chaque pièce du i-ième type vaut d_i cents, où $d_1, \ldots, d_n$ sont des entiers strictement positifs distincts. Un entier strictement positif D est dit *chanceux* si la propriété suivante est satisfaite : pour tout entier strictement positif k, toute collection de pièces (contenant un nombre arbitraire de pièces de chaque type) dont la valeur totale est exactement kD cents peut être séparée en k groupes, chacun d'une valeur de D cents.

Un nombre chanceux existe-t-il nécessairement ?

P3. Turbo l'escargot joue à un jeu sur un plateau comportant $2n$ lignes et $2n$ colonnes. Il y a $2n^2$ monstres qui commencent par occuper $2n^2$ cases distinctes, ce que Turbo sait. Après cela, Turbo choisit une case quelconque et l'étiquette 1. À partir de cette case, Turbo parcourt ensuite toutes les autres $4n^2 - 1$ cases exactement une fois, en les étiquetant successivement $2, 3, \ldots, 4n^2$. Turbo ne se déplace qu'entre des cases partageant un côté et ne revient jamais sur une case déjà visitée.

Le pointage final est la somme des étiquettes des cases contenant des monstres. Les monstres cherchent à se placer de manière à maximiser le pointage, tandis que Turbo cherche à le minimiser en fonction des positions des monstres.

Déterminez, en fonction de n, le plus grand pointage que les monstres peuvent garantir.

P4. Une sphère de centre I est inscrite dans un tétraèdre $ABCD$. Supposons que l'angle entre deux faces quelconques de $ABCD$ soit aigu. Supposons de plus que
$$\frac{\mathrm{vol}(IABC)}{BC} = \frac{\mathrm{vol}(IACD)}{CD} = \frac{\mathrm{vol}(IADB)}{DB}.$$
Montrez que AI est perpendiculaire au plan BCD.

Remarque : Ici, $\mathrm{vol}(IABC)$ désigne le volume du tétraèdre $IABC$, et de même pour $IACD$ et $IADB$.

P5. Pour chaque $n \geq 1$, déterminez le plus grand entier c_n pour lequel il existe un polynôme f de degré n à coefficients rationnels, un nombre irrationnel a, et c_n nombres rationnels distincts $a_1, a_2, \ldots, a_{c_n}$ tels que $f(a + a_i)$ soit un nombre rationnel pour tout $1 \leq i \leq c_n$.