Le Concours mathématique du mésangeai du Canada 2025

Solutions Définitives

Un concours de la Société mathématique du Canada.

Partie A : 5 points chacune

1. Quel est le chiffre des unités du produit suivant ?

$$1 \times 3 \times 5 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \times 17 \times 19 \times 21 \times 23\,?$$

(A) 3 **(B)** 5 **(C)** 7 **(D)** 8

Solution : Comme les nombres sont tous impairs, leur produit doit être impair; et comme l'un des facteurs est 5, le chiffre des unités du produit est 5.

Réponse : $\boxed{\text{(B)}}$

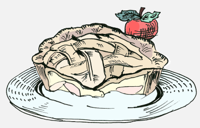
2. Manaswi veut regarder une vidéo de 32 minutes, mais elle doit partir à l'école dans 20 minutes. Quelle est la vitesse de lecture la plus lente parmi celles indiquées ci-dessous qui lui permettra de terminer la vidéo avant de devoir partir ?

(A) 1.25x **(B)** 1.5x **(C)** 1.75x **(D)** 2x

Solution : Manaswi doit regarder la moitié de la vidéo (16 minutes) en 10 minutes. Par conséquent, la vitesse doit être d'au moins 1,6×.

Réponse : $\boxed{\text{(C)}}$

3. Une très grande tarte aux pommes est coupée en 12 parts égales.
Tout d'abord, Angus mange $\frac{1}{3}$ de la tarte. Ensuite, Betty mange 3 parts de tarte. Enfin, Carl mange 20% de la tarte restante.
Combien reste-t-il de parts pour Doris ?

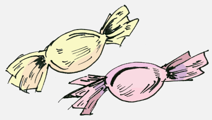


(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

Solution : Angus mange $\frac{1}{3} \times 12 = 4$ pointes. Après que Betty a mangé ses parts, il reste $12 - 4 - 3 = 5$ pointes. Carl mange $20\% = \frac{20}{100}$ de 5 pointes, ce qui signifie que Carl mange 1 pointe. Il reste donc $5 - 1 = 4$ pointes pour Doris.

Réponse : $\boxed{\textbf{(D)}}$

4. Alice, Benjamin et Christian ont 30 bonbons à eux trois. Alice donne 6 de ses bonbons à Benjamin et 2 à Christian. Benjamin donne 5 de ses bonbons à Christian. À ce stade, chacun d'eux a le même nombre de bonbons.
Combien de bonbons Benjamin avait-il au départ ?



(A) 3 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 15

Solution : Procédons à rebours.

À la fin, chaque ami a $30 \div 3 = 10$ bonbons. Avant de donner 5 bonbons à Christian, Benjamin avait 15 bonbons. Avant de recevoir 6 bonbons d'Alice, Benjamin avait 9 bonbons.

Par conséquent, Benjamin a commencé avec 9 bonbons.

Réponse : $\boxed{\textbf{(B)}}$

5. L'école primaire Pineview envoie des bulletins d'information par courrier. Elle forme deux équipes d'élèves bénévoles pour aider à les préparer.

- L'équipe A commence à midi et travaille pendant 2 heures à un rythme constant de 900 dépliants par heure.
- L'équipe B commence lorsque l'équipe A a terminé et travaille pendant 4 heures à un rythme constant de 600 dépliants par heure.

À quelle heure la moitié des dépliants étaient-ils prêts ?

(A) 14 h
(B) 14 h 30
(C) 15 h
(D) 15 h 30

Solution : L'équipe A prépare $2 \times 900 = 1800$ dépliants, tandis que l'équipe B en prépare $4 \times 600 = 2400$. Ainsi, au total, $1800 + 2400 = 4200$ dépliants ont été préparés.

La moitié du nombre total de dépliants est $4200 \div 2 = 2100$.

Lorsque l'équipe A a terminé, elle a préparé 1800 dépliants; par conséquent, la moitié des dépliants étaient prêts lorsque l'équipe B avait préparé 300 dépliants.

Comme l'équipe B prépare 600 dépliants par heure, il lui faudra $300 \div 600 = \frac{1}{2}$ heure pour atteindre le point médian.

Étant donné que l'équipe B a commencé à 14 h 00, le point médian est atteint à 14 h 30.

Réponse : $\boxed{\textbf{(B)}}$

Partie B : 5 points chacune

1. Combien de nombres à deux chiffres ont la propriété suivante : lorsque l'on ajoute 18 à ces nombres, les deux chiffres s'intervertissent (changent de place) ?
(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 9

Solution : Soient a et b les deux chiffres d'un tel nombre. Alors ce nombre est $10a + b$. On a

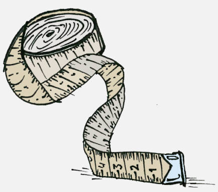
$$\begin{aligned} 10a + b + 18 = 10b + a \quad &\implies \\ 9a + 18 = 9b \quad &\implies \\ b = a + 2\,. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe 7 tels nombres :

$$13, 24, 35, 46, 57, 68, 79\,.$$

Réponse : $\boxed{\textbf{(C)}}$

2. Si l'on sait que :



(I) Jane est plus grande que Sandy.

(II) Sandy n'est pas aussi grande qu'Ed.

(III) Alicia est plus grande que Sandy, mais plus petite qu'Ed.

(IV) Ron n'est pas aussi grand qu'Alicia, mais plus grand que Sandy.

(V) Sara n'est pas aussi grande que Jane, mais plus grande qu'Ed.

Trouvez la personne la plus grande et la personne la plus petite du groupe.

(A) Jane et Sandy **(B)** Jane et Ron
(C) Sara et Ed **(D)** Ron et Sandy
(E) Ed et Sara

Solution : L'énoncé IV nous dit que Sandy est plus petite que Ron qui, à son tour, est plus petit qu'Alicia.

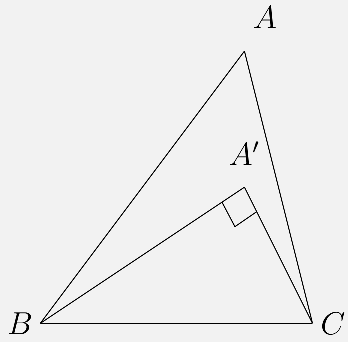
L'énoncé II nous dit, en plus, qu'Alicia est plus petite qu'Ed.

L'énoncé V nous dit qu'Ed est plus petit que Sara qui, à son tour, est plus grande que Jane.

Par conséquent, le classement des élèves, du plus petit au plus grand, est : Sandy, Ron, Alicia, Ed, Sara et Jane.

Réponse : **(A)**

3. Étant donné un triangle ABC, on déplace le point A vers le côté BC tout en gardant les points B et C fixes. Au cours de ce déplacement, la mesure de l'angle $\angle BAC$ augmente. Supposons que lorsque A se déplace vers une nouvelle position A', l'angle $\angle BAC$ passe de $40°$ à $90°$, de sorte que $\angle BA'C = 90°$. Si l'on sait également que $\angle ABA' = \angle ACA'$, déterminez la mesure de l'angle $\angle ABA'$.



(pas à l'échelle)

(A) $20°$ **(B)** $25°$
(C) $40°$ **(D)** $50°$
(E) $90°$

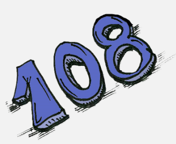
Solution : Comme la somme des angles intérieurs d'un triangle est $180°$, une augmentation de $\angle BAC$ entraînera une diminution de la somme des deux autres angles.

$$\angle ABA' + \angle ACA' = 90° - 40° = 50°.$$

Donc, $\angle ABA' = 25°$.

Réponse : **(B)**

4. Deux nombres entiers positifs ont un plus grand commun diviseur de 3 et un produit de 108.
Combien de valeurs différentes peut prendre le plus petit des deux nombres entiers ?



(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

Solution : Soient $x < y$ les deux nombres. Alors, il existe des nombres a et b premiers entre eux et tels que

$$x = 3a$$
$$y = 3b\,.$$

Comme $xy = 108$, on obtient

$$ab = 12\,.$$

Le nombre 12 peut s'écrire comme un produit de trois façons : 1×12, 2×6 et 3×4, mais seules deux de ces écritures correspondent à des produits de nombres premiers entre eux.

Ainsi, le plus petit des deux entiers ne peut être que $3 \cdot 1 = 3$ ou $3 \cdot 3 = 9$.

La réponse est donc 2.

Solution alternative

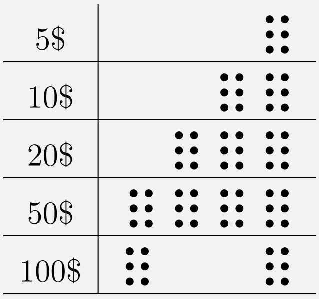
Le nombre 108 peut s'écrire comme un produit de deux nombres de la manière suivante :

$$1 \cdot 108$$
$$2 \cdot 54$$
$$3 \cdot 36$$
$$4 \cdot 27$$
$$6 \cdot 18$$
$$9 \cdot 12\,.$$

Parmi ceux-ci, seuls $3 \cdot 36$ et $9 \cdot 12$ ont un PGCD égal à 3.

Réponse : $\boxed{\textbf{(B)}}$

5. Les billets de banque canadiens comportent des inscriptions en braille dans le coin afin que les gens puissent identifier la valeur d'un billet au toucher. Un groupe de 6 points est appelé un bloc braille. Le billet de 5$ comporte un bloc braille, celui de 10$ en comporte deux, celui de 20$ en comporte trois, celui de 50$ en comporte quatre et celui de 100$ en comporte deux qui sont très éloignés l'un de l'autre, comme le montre l'illustration.



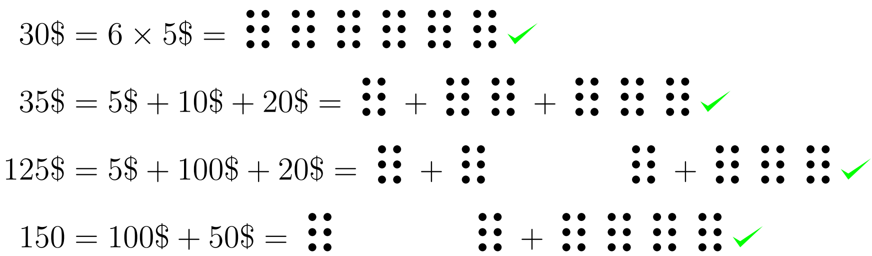
Brooke a plusieurs billets et dit : « Le nombre total de blocs en braille sur tous les billets que je tiens est de 6. » Parmi les propositions suivantes, laquelle ne peut pas correspondre à la valeur totale de tous les billets que Brooke tient ?

(A) 30$ **(B)** 35$ **(C)** 55$ **(D)** 125$ **(E)** 150$

Solution : 55$ ne peut pas être la valeur des billets que Brooke détient.

En effet, si Brooke possède un billet de 50$, alors elle a au moins 60$ au total. Sinon, elle peut avoir au plus 20$ pour chacun des 3 groupes de blocs en braille et donc au plus 40$.

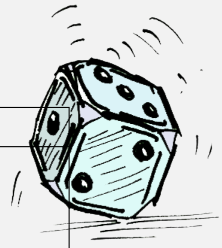
Les autres réponses sont possibles :



Réponse : $\boxed{\text{(C)}}$

<u>Partie C :</u> 6 points chacune

1. Yuchen a joué à un jeu avec les lettres $\boxed{\text{b}}$, $\boxed{\text{r}}$, $\boxed{\text{d}}$ et les voyelles (a,e,i,o,u) pour former des mots. Il a lancé un dé équitable et a suivi ces règles



Lancer de dés	Règle
⚅	écrivez la lettre “a" et relancez le dé,
⚄	écrivez la lettre “e" et relancez le dé,
⚃	écrivez la lettre “i" et relancez le dé,
⚂	écrivez la lettre “o" et relancez le dé,
⚁	écrivez la lettre “u" et relancez le dé,
⚀	écrivez la lettre suivante dans la suite : $\left\{\boxed{\text{b}}, \boxed{\text{r}}, \boxed{\text{d}}\right\}$ et relancez le dé.
	Une fois la lettre “d" écrite, arrêtez.

Yuchen désigne chaque résultat par un mot. Même les mots absurdes comme “baerioioad" sont des mots.
Lequel des mots anglais ci-dessous est le plus susceptible d'avoir été écrit ?

(A) bird **(B)** bread **(C)** board **(D)** aboard **(E)** abroad

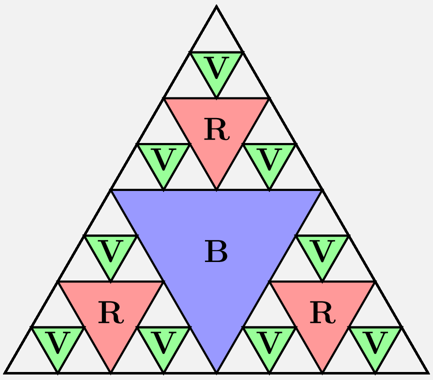
Solution : Comme chacune des lettres est également probable, le mot le plus court est celui qui a le plus de chances d'apparaître. Plus Yuchen joue longtemps, plus le nombre de possibilités augmente, et plus la probabilité qu'un mot particulier de k lettres apparaisse diminue.

Réponse : $\boxed{\textbf{(A)}}$

2. Un triangle équilatéral blanc d'aire 2048 cm^2 est décoré de la manière suivante :

- Les milieux des côtés sont reliés pour former un petit triangle, qui est coloré en bleu (B).
- Ensuite, les milieux des trois nouveaux triangles non colorés sont reliés pour former de petits triangles, qui sont colorés en rouge (R).
- Le processus est répété avec les neuf nouveaux triangles non colorés pour former les triangles centraux finaux, colorés en vert (V).

La figure finale est présentée ci-dessous.



Quelle est l'aire de la région blanche non colorée ?

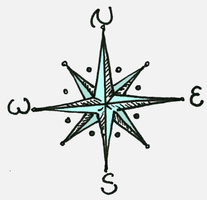
(A) 476 cm^2
(B) 512 cm^2
(C) 864 cm^2
(D) 896 cm^2
(E) 1152 cm^2

Solution : À chaque étape, on colorie $\frac{1}{4}$ de la surface non colorée, de sorte qu'il reste $\frac{3}{4}$ de la surface non colorée. Ainsi, la surface finale non colorée est

$$2048\,\text{cm}^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 864\,\text{cm}^2.$$

Réponse : $\boxed{\textbf{(C)}}$

3. Un mésangeai du Canada quitte son domicile et part en voyage. Chaque jour, le mésangeai effectue une fois chacune des trois actions suivantes :



- le matin, il vole 3 km vers le nord,
- l'après-midi, il vole 4 km vers le sud, et
- le soir, il vole 5 km vers le nord.

Où se trouve le mésangeai après avoir parcouru exactement 2025 km ?

(A) 336 km au nord de son domicile **(B)** 672 km au nord de son domicile
(C) 673 km au nord de son domicile **(D)** 674 km au nord de son domicile
(E) 675 km au nord de son domicile

Solution : Chaque jour, le mésangeai parcourt exactement 12 km et se déplace de 4 km vers le Nord.

Ainsi, après avoir parcouru

$$2016 = 12 \times 168 \text{ km},$$

le mésangeai se trouve exactement

$$4 \times 168 = 672 \text{ km}$$

au nord de son domicile.

À partir de là, le mésangeai parcourt 3 km vers le Nord, 4 km vers le Sud et 2 km vers le Nord. Il termine donc son trajet à 673 km au nord de son domicile.

Réponse : $\boxed{\textbf{(C)}}$

4. Le nombre 236 est un exemple de nombre à trois chiffres dont l'un des chiffres est le produit des deux autres chiffres.
Combien de nombres compris entre 100 et 999 inclusivement ont cette propriété ?

(A) 50 **(B)** 51 **(C)** 52 **(D)** 53 **(E)** 61

Solution : On divise le problème en trois cas.

Cas 1 : L'un des chiffres est zéro. Alors, un deuxième chiffre doit aussi être zéro. Le chiffre non nul doit être le premier.

Il y a 9 nombres dans ce cas.

Cas 2 : Le chiffre zéro n'apparaît pas et l'un des chiffres est 1. Alors, les deux autres chiffres doivent être égaux. Ainsi, les chiffres sont $1, x, x$ pour un certain $1 \leq x \leq 9$.

Lorsque $x = 1$, le nombre doit être 111.

Lorsque $2 \leq x \leq 9$, il y a 8 possibilités pour choisir x et trois possibilités pour choisir la position du chiffre 1 dans le nombre à trois chiffres.

Il y a donc

$$1 + 8 \times 3 = 25$$

nombres dans ce cas.

Cas 3 : Aucun chiffre n'est 0 ou 1. Les trois chiffres sont donc compris entre 2 et 9, inclusivement, et le produit de deux d'entre eux doit être égal au troisième. Il s'ensuit que les chiffres doivent appartenir à l'un des groupes suivants :

$$\{2, 2, 4\} \ ; \ \{2, 3, 6\} \ ; \ \{2, 4, 8\} \ ; \ \{3, 3, 9\} \, .$$

On peut former 3 nombres avec le premier groupe, 6 nombres avec chacun des deuxième et troisième groupes, et 3 nombres avec le dernier groupe.

Par conséquent, dans ce cas, il y a

$$3 + 6 + 6 + 3 = 18$$

nombres.

Au total, il y a donc

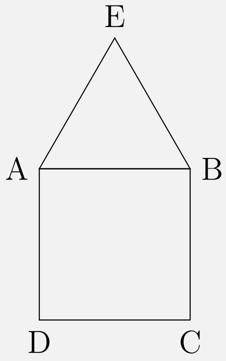
$$9 + 25 + 18 = 52$$

nombres.

Nous pouvons tous les lister :
100, 111, 122, 133, 144, 155, 166, 177, 188, 199,
200, 212, 221, 224, 236, 242, 248, 263, 284,
300, 313, 326, 331, 339, 362, 393,
400, 414, 422, 428, 441, 482,
500, 515, 551,
600, 616, 623, 632, 661,
700, 717, 771,
800, 818, 824, 842, 881,
900, 919, 933, 991.
Ainsi, il y en a 52.

Réponse : $\boxed{\textbf{(C)}}$

5. Deux coureurs, Anna et Bob, courent sur la piste suivante. Chaque côté (AB, BC, CD, DA, AE, BE) mesure exactement 100 m de long.



Ils commencent à courir en même temps.
Anna part du point A et court autour du triangle à une vitesse constante de 100 m/min, de A à E, puis à B, puis à A, puis à E, puis à B...
Bob part du point B et court autour du carré à une vitesse constante de 200 m/min, de B à C, puis à D, puis à A, puis à B, puis à C...
Combien de secondes après avoir commencé à courir se rencontrent-ils pour la deuxième fois ?

(A) 140 **(B)** 200 **(C)** 240 **(D)** 300 **(E)** 340

Solution : Anna et Bob se rencontrent seulement entre les points A et B. Examinons tous les moments où ils se trouvent tous deux de ce côté.

Il faut 60 secondes à Anna pour courir un côté complet et 30 secondes à Bob pour faire de même.

Anna arrive pour la première fois au point B après 120 secondes. Entre 120 et 180 secondes, elle court de B vers A. Comme il lui faut 180 secondes pour faire le tour complet, elle court de B vers A durant les intervalles suivants :

$$120 - 180\ ;\ 300 - 360\ ;\ 480 - 540\ ;\ 660 - 720\ ;\ \ldots$$

Bob arrive en A après 90 secondes et en B après 120 secondes. À ce moment-là, les deux se rencontrent pour la première fois. Comme Bob met 120 secondes pour faire un tour, il court de A vers B durant les intervalles suivants :

$$90 - 120\ ;\ 210 - 240\ ;\ 330 - 360\ ;\ 450 - 480\ ;\ \ldots$$

La deuxième rencontre a lieu lorsque Anna court de B vers A dans l'intervalle $300 - 360$ secondes et Bob court de A vers B dans l'intervalle $330 - 360$ secondes, à un certain point X entre A et B.

Notons le moment de leur rencontre $360 - t$ secondes.

Dans les t secondes suivantes, Anna court de X vers A et Bob court de X vers B. Par conséquent :

$$100 = AB = AX + XB = 100 \cdot \frac{t}{60} + 200 \cdot \frac{t}{60} = 5t,$$

ce qui implique $t = 20$ secondes.

Ils se rencontrent donc pour la deuxième fois après $360 - 20 = 340$ secondes.

Réponse : $\boxed{\textbf{(E)}}$