Concours mathématique du lynx du Canada

Solutions définitives

Un concours de la Société mathématique du Canada.

Partie A : 5 points chacune

1. Si $S = 2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$, que vaut S?

(A) 16 **(B)** 32 **(C)** 63 **(D)** 64 **(E)** 128

Solution : Cette expression est égale à $S = 2 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$. En additionnant ces six termes, on obtient la réponse recherchée, à savoir 64.

Ce n'est pas une coïncidence si chaque somme partielle double le total précédent :
$2+2 = \mathbf{4}$, $2+2+4 = \mathbf{8}$, $2+2+4+8 = \mathbf{16}$, $2+2+4+8+16 = \mathbf{32}$,
et $2+2+4+8+16+32 = \mathbf{64}$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(D)}}$

2. Si $S = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} - \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} - \frac{6}{6}$, que vaut S?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** 1 **(E)** $\frac{4}{3}$

Solution : Cette expression est égale à

$$S = \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} - \frac{3}{6}\right) + \left(\frac{4}{6} + \frac{5}{6} - \frac{6}{6}\right) = \frac{1+2-3}{6} + \frac{4+5-6}{6} = \frac{0}{6} + \frac{3}{6} = \frac{3}{6}.$$

Comme $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, on conclut que $S = \frac{1}{2}$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(B)}}$

3. Si $1 + 3x = -5 - 7x$, quelle est la valeur de $100 + 100x$?

(A) 40 **(B)** 60 **(C)** 140 **(D)** 160 **(E)** 200

Solution : Comme $1 + 3x = -5 - 7x$, on peut ajouter $7x$ des deux côtés pour obtenir $1+3x+7x = -5-7x+7x$, ce qui se simplifie en $1+10x = -5$. On soustrait ensuite 1 des deux côtés pour obtenir $1 + 10x - 1 = -5 - 1$, ce qui se simplifie en $10x = -6$.

À ce point, on pourrait résoudre pour x, mais comme on cherche à déterminer la valeur de $100+100x$, une solution beaucoup plus rapide consiste à remarquer que $10x = -6$ implique $100x = -60$, et donc $100 + 100x$ doit être égal à $100 - 60$, ce qui donne 40.

Réponse : $\boxed{\textbf{(A)}}$

4. Soit $\{10, 11, 12, 13, \ldots, 97, 98, 99\}$ l'ensemble des nombres à deux chiffres. Combien de nombres à deux chiffres sont divisibles par 3?

(A) 30 **(B)** 31 **(C)** 32 **(D)** 33 **(E)** 34

Solution : Considérons l'ensemble de tous les entiers positifs inférieurs à 100 qui sont divisibles par 3. Cet ensemble est constitué de $\{3, 6, 9, 12, 15, \ldots, 99\}$, que l'on peut réécrire comme $\{3 \times 1, 3 \times 2, 3 \times 3, 3 \times 4, 3 \times 5, \ldots, 3 \times 33\}$.

Il est clair qu'il y a 33 entiers dans cet ensemble. Pour obtenir la réponse à cette question, on doit retirer les trois éléments $\{3, 6, 9\}$ puisqu'on veut seulement inclure les entiers à deux chiffres divisibles par 3. Ainsi, la réponse est $33 - 3 = 30$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(A)}}$

5. On considère un nombre à trois chiffres ABC. On l'écrit en inversant l'ordre de ses chiffres (CBA). On soustrait le plus petit de ces deux nombres du plus grand. Laquelle des réponses suivantes ne peut pas être la différence de cette opération?

(A) 297 **(B)** 396 **(C)** 595 **(D)** 693 **(E)** 792

Solution : Soient A, B, C des chiffres de 0 à 9. Ainsi, le nombre à 3 chiffres peut s'écrire $100A + 10B + C$, et si l'on écrit ce nombre à l'envers, on obtient $100C + 10B + A$. La différence entre ces deux nombres est $(100A + 10B + C) - (100C + 10B + A) = 99A - 99C = 99(A - C)$.

Si $A \geq C$, alors cette différence est $99(A - C)$, et si $C > A$, cette différence est $99(C - A)$. Dans tous les cas, cette différence *doit* être un multiple de 99.

Parmi les cinq options présentées, on constate que (c) n'est pas un multiple de 99 puisqu'il est égal à $595 = 6 \times 99 + 1$. En revanche, les autres options sont toutes des multiples de 99.

En effet, on peut obtenir les différences 297, 396, 693, 792 en s'assurant que $A - C$ est égal à 3, 4, 7, 8, respectivement.

Réponse : $\boxed{\textbf{(C)}}$

Partie B: 5 points chacune

6. À une épicerie, on peut acheter 3 avocats et 2 bananes pour 10,50\$; on peut également acheter 4 avocats et 3 bananes pour 14,50\$. Combien coûte l'achat de 5 avocats et 4 bananes?

(A) 18 \$ **(B)** 18,50 \$ **(C)** 19 \$ **(D)** 19,50 \$ **(E)** 20 \$

Solution : Soit A le prix d'un avocat et B le prix d'une banane.

D'après les informations données, on a $3A+2B = 10,50$ et $4A+3B = 14,50$. On peut résoudre pour A et B.

En multipliant la première équation par 3 et la deuxième équation par 2, on obtient $9A + 6B = 31,50$ et $8A + 6B = 29,00$.

En soustrayant la seconde équation de la première, on a $(9A + 6B) - (8A + 6B) = 31,50 - 29,00$, ce qui implique $A = 2,50$.

Comme $3A+2B = 10,50$, on obtient $2B = 10,50-3A = 10,50-3\times 2,50 = 10,50 - 7,50 = 3,00$. Ainsi, $B = 1,50$.

Puisque $A = 2,50$ et $B = 1,50$, on a $5A + 4B = 5 \times 2,50 + 4 \times 1,50 = 12,50 + 6,00 = 18,50$.

Il existe une solution beaucoup plus rapide en prenant la différence des deux équations, $(4A + 3B) - (3A + 2B) = 14,50 - 10,50$, et en constatant que cela se simplifie en $A + B = 4$. Comme on sait que $4A + 3B = 14,50$, si l'on ajoute $A + B = 4$, on obtient $5A + 4B = 14,50 + 4 = 18,50$, et on trouve immédiatement la bonne réponse sans avoir à résoudre pour A et B.

Une autre solution consiste à soustraire la première équation du double de la deuxième équation. On obtient alors directement la bonne réponse :

$$5A+4B = 2(4A+3B)-1(3A+2B) = 2\times 14,50-1\times 10,50 = 29,00-10,50 = 18,50.$$

Réponse : $\boxed{\textbf{(B)}}$

7. Au début de cette année (2025), Xavier a 100 000 \$ dans son compte bancaire et Yvette a 100 \$ dans son compte bancaire. Chaque année, le montant dans le compte de Xavier diminue de 10% et le montant dans le compte d'Yvette augmente de 80%. Quelle sera la première année où Yvette aura plus d'argent que Xavier?

   (A) 2030 **(B)** 2035 **(C)** 2040 **(D)** 2045 **(E)** 2050

Solution : Soit $x(n)$ le montant d'argent dans le compte de Xavier n années après 2025. Définissons de même $y(n)$.

Comme le compte de Xavier diminue de 10% chaque année, on a $x(k) = (1-0.1)x(k-1) = x(k-1)\times 0,9$ pour tout $k \geq 1$. On sait que $x(0) = 100\,000$ et donc $x(1) = 100\,000 \times 0,9$, $x(2) = 100\,000 \times 0,9^2$, $x(3) = 100\,000 \times 0.9^3$, et ainsi de suite. En général, $x(n) = 100\,000 \times 0,9^n$.

Comme le compte d'Yvette augmente de 80% chaque année, on a $y(k) = (1+0,8)y(k-1) = y(k-1) \times 1,8$ pour tout $k \geq 1$. Par un raisonnement analogue, puisque $y(0) = 100$, on a $y(n) = 100 \times 1,8^n$.

On cherche la plus petite valeur de n pour laquelle Yvette aura plus d'argent que Xavier, ce qui est équivalent à l'inégalité $100 \times 1,8^n > 100\,000 \times 0,9^n$. Cela se simplifie en $2^n \cdot (0,9)^n = 1,8^n > 1000 \times 0,9^n$, ce qui implique $2^n > 1000$ puisqu'on peut diviser les deux côtés par $0,9^n$.

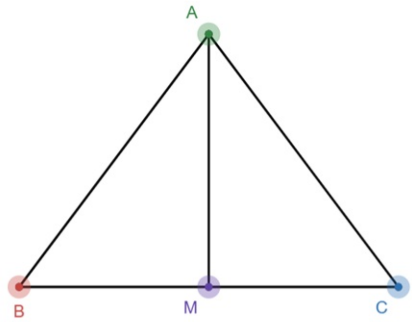
Si $n = 9$, alors $2^n = 512 < 1000$, mais si $n = 10$, alors $2^n = 1024 > 1000$. Ainsi, dix ans après l'année 2025 sera la première fois où Yvette aura plus d'argent que Xavier. Cela se produit en 2035.

Réponse : $\boxed{\textbf{(B)}}$

8. $\triangle ABC$ est un triangle isocèle avec $AB = AC$ et ayant une base $BC = 12$. Si l'aire de ce triangle est de 48 unités carrées, combien d'unités mesure le périmètre du triangle $\triangle ABC$?

(A) 16 **(B)** 24 **(C)** 32 **(D)** 40 **(E)** Impossible à déterminer

Solution : Soit M le milieu de BC. Comme le triangle $\triangle ABC$ est isocèle avec $AB = AC$, le segment AM doit être la hauteur du triangle de base BC.



Comme l'aire de ce triangle est 48 unités carrées, on a $\frac{AM \times BC}{2} = 48$, ce qui implique $AM = \frac{2 \times 48}{BC} = \frac{96}{12} = 8$.

On sait que $BC = 12$. Comme M est le milieu de BC, on a $BM = 6$ et $MC = 6$. Par le théorème de Pythagore, $AB = AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$.

Il s'ensuit que le périmètre de $\triangle ABC$ est $AB + AC + BC = 10 + 10 + 12 = 32$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(C)}}$

9. Une suite infinie $x_1, x_2, x_3, \ldots$ d'entiers positifs est construite de la manière suivante:

   On commence avec $x_1 = c$ pour un certain entier positif c. Pour tout $n \geq 1$,

   Si x_n est un carré parfait, alors $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$.
   Si x_n n'est pas un carré parfait, alors $x_{n+1} = x_n + 3$.

   Par exemple, si $c = 43$, alors les six premiers termes de cette suite infinie sont $43, 46, 49, 7, 10, 13$.

   Parmi les valeurs de c suivantes, laquelle produira une suite infinie qui ne décroîtra *jamais*?

   (A) 123 **(B)** 124 **(C)** 125 **(D)** 126 **(E)** 127

Solution : Les règles de cette suite sont simples : si x_n est un carré parfait, le terme suivant est $\sqrt{x_n}$. Sinon, le terme suivant augmente de 3.

Par exemple, si $c = 123$, alors les neuf premiers termes de la suite sont

$$123, 126, 129, 132, 135, 138, 141, 144, 12.$$

La suite ci-dessus montre que la réponse ne peut pas être 123 ou 126 puisque cette suite contient un carré parfait ($144 = 12^2$), et qu'elle décroît donc lorsqu'elle passe de 144 à 12.

De même, la réponse ne peut pas être 124 ou 127 puisque la suite

$$124, 127, 130, 133, 136, 139, 142, 145, 148, 151, 154, 157, 160, 163, 169, 13$$

contient aussi un carré parfait ($169 = 13^2$), et elle décroît donc lorsqu'elle passe de 169 à 13.

Enfin, considérons la suite qui commence avec $c = 125$. On obtient

$$125, 128, 131, 134, 137, 140, 143, \cdots.$$

On remarque que chaque terme de cette suite est égal à $3k + 2$ pour un certain entier k. (Autrement dit, chaque terme est congru à 2 modulo 3). On affirme que cette suite ne contient aucun carré parfait.

Supposons, au contraire, que $3k+2 = n^2$ pour certains entiers n et k. On considère trois cas : $n = 3m$, $n = 3m+1$ et $n = 3m+2$ pour un certain entier m.

(i) Si $n = 3m$, alors $3k + 2 = n^2 = (3m)^2 = 9m^2$, ce qui se simplifie en $2 = 9m^2 - 3k$, ou $\frac{2}{3} = 3m^2 - k$.

(ii) Si $n = 3m + 1$, alors $3k + 2 = n^2 = (3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1$, ce qui se simplifie en $1 = 9m^2 + 6m - 3k$, ou $\frac{1}{3} = 3m^2 + 2m - k$.

(iii) Si $n = 3m + 2$, alors $3k + 2 = n^2 = (3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4$, ce qui se simplifie en $-2 = 9m^2 + 12m - 3k$, ou $-\frac{2}{3} = 3m^2 + 4m - k$.

Dans les trois cas, on obtient une contradiction puisque le côté gauche est une fraction alors que le côté droit est un entier.

On a donc démontré que la suite infinie commençant par $c = 125$ ne contient aucun carré parfait. Ainsi, cette suite ne décroîtra jamais puisque chaque terme est supérieur de 3 au précédent.

Réponse : $\boxed{\textbf{(C)}}$

10. Considérons un cercle dont l'équation est $x^2 + y^2 = 100$ et une droite dont l'équation est $y = \frac{x}{7} + \frac{50}{7}$. Le cercle et la droite se coupent en deux points, P et Q. Quelle est la longueur de PQ?

(A) $7\sqrt{2}$ **(B)** 10 **(C)** 14 **(D)** $10\sqrt{2}$ **(E)** $14\sqrt{2}$

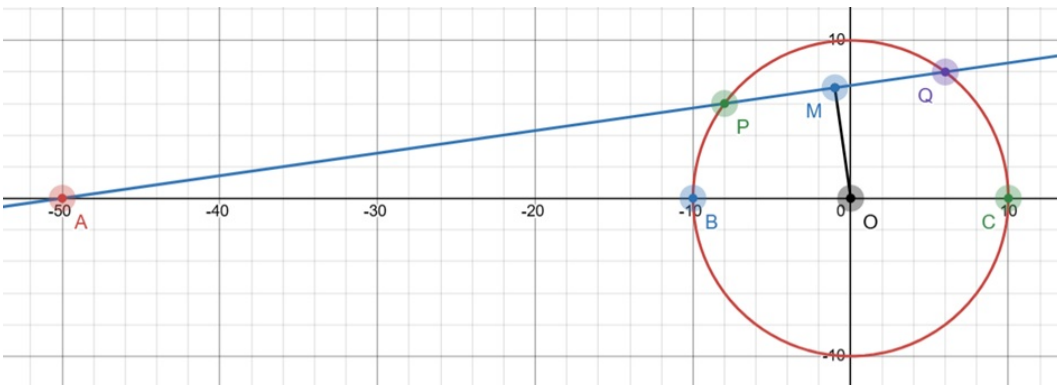
Solution : Notre première solution est algébrique : on résout un système de deux équations à deux inconnues afin d'obtenir les coordonnées des points P et Q.

L'équation de la droite est $7y = x + 50$, ce qui implique que $x = 7y - 50$. En substituant dans l'équation du cercle, on obtient $100 = x^2 + y^2 = (7y - 50)^2 + y^2 = 49y^2 - 700y + 2500 + y^2 = 50y^2 - 700y + 2500$.

En divisant les deux côtés par 50, on obtient $2 = y^2 - 14y + 50$, ce qui signifie que $0 = y^2 - 14y + 48 = (y - 6)(y - 8)$. Ainsi, $y = 6$ ou $y = 8$. En substituant ces valeurs dans l'équation $7y = x + 50$, on voit que $y = 6$ donne $x = -8$ et $y = 8$ donne $x = 6$.

Donc, les points P et Q sont $(-8, 6)$ et $(6, 8)$. Par le théorème de Pythagore, la longueur de PQ est $\sqrt{(-8 - 6)^2 + (6 - 8)^2} = \sqrt{14^2 + 2^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

Notre deuxième solution est géométrique. Soit M le milieu de PQ, et soient B et C les points d'intersection du cercle avec l'axe des x.



En posant $A = (-50, 0)$, on constate que $AP \cdot AQ = AB \cdot AC$ d'après le théorème de la puissance d'un point. Comme M est le milieu de PQ et que l'origine O est le milieu de BC, on a :

$$\begin{aligned} AP \cdot AQ &= AB \cdot AC \\ (AM - MP) \cdot (AM + MQ) &= (AO - OB) \cdot (AO + OC) \\ (AM - MP) \cdot (AM + MP) &= (50 - 10) \cdot (50 + 10) \\ AM^2 - MP^2 &= 40 \cdot 60 \\ MP^2 &= AM^2 - 2400 \end{aligned}$$

Comme l'équation de la droite AP est $y = \frac{x}{7} + \frac{50}{7}$, sa pente est $\frac{1}{7}$. En d'autres termes, $\tan(\angle OAM) = \frac{1}{7}$.

Cela implique que $\sin(\angle OAM) = \frac{1}{\sqrt{1^2+7^2}} = \frac{1}{\sqrt{50}}$ et que $\cos(\angle OAM) = \frac{7}{\sqrt{1^2+7^2}} = \frac{7}{\sqrt{50}}$.

Comme le triangle $\triangle OMA$ est rectangle en M, on a $\cos(\angle OAM) = \frac{AM}{AO}$, ce qui donne $AM = 50 \cdot \frac{7}{\sqrt{50}} = 7\sqrt{50}$, donc $AM^2 = 7^2 \cdot 50 = 49 \cdot 50 = 2450$.

Il en résulte que $MP^2 = AM^2 - 2400 = 2450 - 2400 = 50$, donc $MP = 5\sqrt{2}$. Ainsi, $PQ = MP + MQ = 2MP = 10\sqrt{2}$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(D)}}$

Partie C: 6 points chacune

11. Soit x un nombre réel tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et pour lequel $\dfrac{\sin x + 1}{\cos x} = \dfrac{4}{3}$.

Quelle est la valeur de $\dfrac{\cos x + 1}{\sin x}$?

(A) $\frac{3}{4}$ **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 7

Solution : L'équation $\dfrac{\sin x + 1}{\cos x} = \dfrac{4}{3}$ est équivalente à $3 \sin x + 3 = 4 \cos x$. Comme $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
3 \sin x + 3 &= 4 \cos x \\
(3 \sin x + 3)^2 &= (4 \cos x)^2 \\
9 \sin^2 x + 18 \sin x + 9 &= 16 \cos^2 x \\
9 \sin^2 x + 18 \sin x + 9 &= 16(1 - \sin^2 x) \\
9 \sin^2 x + 18 \sin x + 9 &= 16 - 16 \sin^2 x \\
25 \sin^2 x + 18 \sin x - 7 &= 0 \\
(25 \sin x - 7)(\sin x + 1) &= 0
\end{aligned}$$

Comme on nous donne que x satisfait l'inégalité $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on conclut que $\sin x$ doit être égal à $\frac{7}{25}$, puisque $\sin x$ ne peut pas être égal à -1.

Puisque $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, on obtient $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{7^2}{25^2}} = \sqrt{\frac{25^2 - 7^2}{25^2}} = \sqrt{\frac{625-49}{625}} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25}$.

On en conclut que $\dfrac{\cos x + 1}{\sin x} = \dfrac{\frac{24}{25} + 1}{\frac{7}{25}} = \dfrac{\frac{49}{25}}{\frac{7}{25}} = 7$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(E)}}$

12. Pour combien de nombres entiers positifs n le nombre $\dfrac{n^2}{n + 45}$ est-il un entier?

(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 14 **(E)** 15

Solution : On a $\dfrac{n^2}{n+45} = \dfrac{n^2-2025}{n+45} + \dfrac{2025}{n+45} = \dfrac{(n+45)(n-45)}{n+45} + \dfrac{2025}{n+45} = (n-45) +$

Ainsi, on veut trouver le nombre d'entiers positifs n pour lesquels $\frac{2025}{n+45}$ est un entier, c'est-à-dire lorsque $n+45$ est un diviseur de 2025.

Remarquons que $2025 = 45^2 = (3 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 3^4 \cdot 5^2$. Chaque diviseur de 2025 est de la forme $3^a 5^b$, où $0 \leq a \leq 4$ et $0 \leq b \leq 2$. Il y a 5 choix possibles pour a et 3 choix possibles pour b.

En listant ces $5 \times 3 = 15$ diviseurs du plus petit au plus grand, on obtient :

$$1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 135, 225, 405, 675, 2025.$$

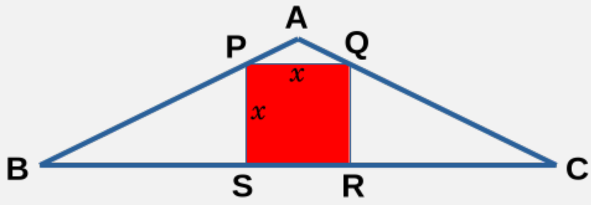
Pour chacun de ces 15 diviseurs, on l'égale à $n+45$ et on résout pour n. Comme n doit être un entier positif, on ne considère que les diviseurs supérieurs à 45. On obtient donc :

$$n{+}45 \in [75, 81, 135, 225, 405, 675, 2025] \;\; \rightarrow \;\; n \in [30, 36, 90, 180, 360, 630, 1980].$$

On voit qu'il existe exactement 7 entiers positifs n pour lesquels $n+45$ est un diviseur de 2025.

Réponse : $\boxed{\textbf{(A)}}$

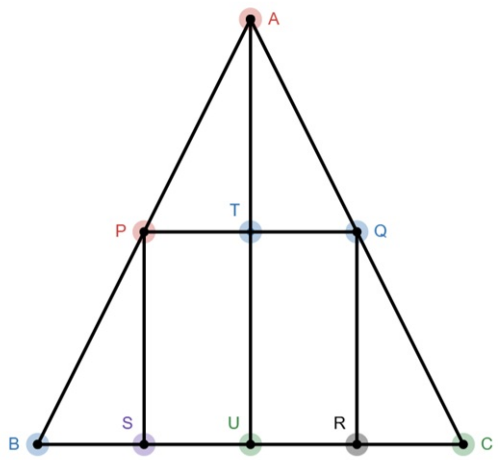
13. Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC$ dont l'aire est de 8 unités carrées. Construisez un carré $PQRS$ où P est sur AB, Q est sur AC, R est sur BC, et S est sur BC.



Si x est la longueur d'un côté du carré, quelle est la valeur maximale que x peut prendre?

(A) $\frac{4}{3}$ **(B)** $\sqrt{2}$ **(C)** 2 **(D)** $\sqrt{3}$ **(E)** $2\sqrt[4]{3}$

Solution : Soit U le milieu de BC et soit T l'intersection de la hauteur AU avec le côté PQ.



Soit $AU = h$ la hauteur du triangle et $BC = b$ la base du triangle. On nous donne que x est la longueur du côté du carré $PQRS$.

Comme le triangle $\triangle ABC$ est isocèle avec $AB = AC$, on a $BU = \frac{b}{2}$ et $BS = BU - SU = \frac{b}{2} - \frac{x}{2}$.

Remarquons que $\triangle ABU$ est semblable à $\triangle PBS$. Il s'ensuit que $\frac{AU}{BU} = \frac{PS}{BS}$, ce qui implique $AU \times BS = BU \times PS$. D'après ce qui précède, on obtient

$h\left(\frac{b}{2} - \frac{x}{2}\right) = \frac{b}{2} \cdot x.$

Cela se simplifie en $h(b - x) = bx$, ou encore $hb = hx + bx = x(h + b)$. On en conclut que $x = \frac{hb}{h+b}$.

On sait que h et b sont des nombres positifs. D'après l'inégalité arithmético-géométrique, on a $\frac{h+b}{2} \geq \sqrt{hb}$, avec égalité si et seulement si $h = b$. On peut démontrer cette inégalité en montrant qu'elle est équivalente à $(\sqrt{h} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, où l'égalité a lieu si et seulement si $h = b$.

Ainsi, la longueur du côté x satisfait $x = \frac{hb}{h+b} = \frac{hb}{2} \cdot \frac{2}{h+b} \leq \frac{hb}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{hb}} = \frac{\sqrt{hb}}{2}$.

Étant donné que l'aire du triangle $\triangle ABC$ est 8 unités carrées, on a $8 = \frac{AU \cdot BC}{2} = \frac{hb}{2}$, ce qui implique $hb = 16$. D'après ce qui précède, si $hb = 16$, alors $x \leq \frac{\sqrt{hb}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

La valeur maximale $x = 2$ est atteinte lorsque h et b sont égaux, c'est-à-dire $h = 4$ et $b = 4$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(C)}}$

14. Considérons toutes les suites contenant chacune 9 lettres, où chaque lettre est soit A soit B. On dit qu'une telle suite est *diversifiée* si elle ne contient pas deux A consécutifs ni trois B consécutifs. Par exemple, ABABABABA et BBABABBAB sont diversifiées mais AAABABBBB et BBABBAABB ne le sont pas.

    Combien de suites binaires de 9 lettres sont diversifiées ?

    (A) 18 **(B)** 19 **(C)** 20 **(D)** 21 **(E)** 22

Solution : Soit $f(n)$ le nombre de chaînes diversifiées de n lettres. Par exemple, on vérifie facilement que $f(1) = 2$ et $f(2) = 3$. On a $f(3) = 4$ puisque les seules chaînes diversifiées sont $\{$ABA, ABB, BBA, BAB$\}$ et $f(4) = 5$ puisque les seules chaînes diversifiées sont $\{$ABAB, ABBA, BABA, BABB, BBAB$\}$.

Montrons que $f(n) = f(n-2) + f(n-3)$.

Pour compter le nombre de chaînes diversifiées de n lettres, on considère deux cas : lorsque la dernière lettre est A et lorsque la dernière lettre est B, puisque X_{n-1} peut être soit A ou B, mais pas les deux.

Si la dernière lettre est B, il y a $f(n-2)$ possibilités pour les $n-2$ premières lettres, par définition. Ainsi, chacune de ces chaînes est de la forme $X_1, X_2, \ldots, X_{n-2}, X_{n-1}$, B. Si X_{n-2} est A alors X_{n-1} doit être B puisque deux A consécutifs sont interdits. Si X_{n-2} est B alors X_{n-1} doit être A puisque trois B consécutifs sont interdits. Pour chacune de ces $f(n-2)$ possibilités, il existe exactement une chaîne diversifiée de n lettres dont la dernière lettre est B. Ainsi, il y a exactement $f(n-2)$ chaînes diversifiées dans ce cas.

Si la dernière lettre est A, il y a $f(n-3)$ possibilités pour les $n-3$ premières lettres, par définition. Ainsi, chacune de ces chaînes est de la forme $X_1, X_2, \ldots, X_{n-3}, X_{n-2}, X_{n-1}$, A. On remarque que X_{n-1} doit être B puisque deux A consécutifs sont interdits. Si X_{n-3} est A alors X_{n-2} doit être B puisque deux A consécutifs sont interdits. Si X_{n-3} est B alors X_{n-2} doit être A puisque trois B consécutifs sont interdits. Pour chacune de ces $f(n-3)$ possibilités, il existe exactement une chaîne diversifiée de n lettres dont la dernière lettre est A. Ainsi, il y a exactement $f(n-3)$ chaînes diversifiées dans ce cas.

On a donc montré que $f(n) = f(n-2) + f(n-3)$. À l'aide de cette relation de récurrence, on peut calculer $f(9)$ puisqu'on connaît déjà les valeurs pour $n = 2, 3, 4$. On a :

$$\begin{aligned} f(9) &= f(7) + f(6) \\ &= [f(5) + f(4)] + [f(4) + f(3)] \\ &= f(5) + f(4) + f(4) + f(3) \\ &= [f(3) + f(2)] + f(4) + f(4) + f(3) \\ &= 4 + 3 + 5 + 5 + 4 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Voici une autre solution qui utilise $f(4) = 5$ pour prouver que $f(9) = 21$.

Supposons que la chaîne de 9 lettres $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9$ soit diversifiée. Alors il y a $f(4) = 5$ possibilités pour le sous-mot X_1, X_2, X_3, X_4 et $f(4) = 5$ possibilités pour le sous-mot X_6, X_7, X_8, X_9.

Considérons les $5 \times 5 = 25$ façons possibles de former une chaîne de 9 lettres où les quatre premières lettres et les quatre dernières lettres sont des sous-chaînes diversifiées.

Si à la fois X_4 et X_6 sont B, alors X_5 doit être A, et cette chaîne de 9 lettres est assurément diversifiée. De même, si à la fois X_4 et X_6 sont A, alors X_5 doit être B, et cette chaîne est assurément diversifiée.

Si exactement l'un de X_4 et X_6 est A, alors X_5 ne peut pas être A, mais X_5 peut être B tant que la chaîne ne contient pas BBB. On montre qu'il n'existe que quatre cas où la chaîne obtenue n'est pas diversifiée.

(i) Si X_4 est A (ce qui se produit dans les chaînes ABB**A**, BAB**A**), alors X_5 doit être B. Le deuxième sous-mot de 4 lettres ne peut donc pas être **BB**AB, sinon X_5, X_6, X_7 seraient tous B.

(ii) Si X_6 est A (ce qui se produit dans les chaînes **A**BAB, **A**BBA), alors X_5 doit être B. Le premier sous-mot de 4 lettres ne peut donc pas être BA**BB**, sinon X_3, X_4, X_5 seraient tous B.

Parmi les $5 \times 5 = 25$ façons de former une chaîne de 9 lettres où les quatre premières et les quatre dernières lettres sont des sous-chaînes diversifiées, on a identifié exactement quatre situations où la chaîne n'est pas diversifiée. Dans les 21 cas restants, il existe exactement un choix de A ou B pour X_5 qui assure que la chaîne est diversifiée.

Nous concluons donc que $f(9) = 25 - 4 = 21$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(D)}}$

15. Soit $f(x) = px^4 + 2025x^3 + qx^2 + 2025x + p$, où p est un entier positif. Si $f(x) = 0$ a exactement trois solutions dont chacune est un nombre rationnel, déterminez la plus petite valeur possible que p peut prendre.

(A) 1 **(B)** 25 **(C)** 44 **(D)** 45 **(E)** 46

Solution : Remarquons d'abord que $f(0) = 0 + 0 + 0 + 0 + p = p$. Puisque p est un entier positif, $f(0)$ ne peut pas être 0 et donc $x = 0$ ne peut pas être une racine de $f(x)$.

Posons $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$. Comme $x = 0$ n'est pas une racine de $f(x)$, on voit que $x = r$ est une racine de $f(x)$ si et seulement si $x = r$ est une racine de $g(x)$.

On remarque que $g(x) = \frac{f(x)}{x^2} = px^2 + \frac{p}{x^2} + 2025x + \frac{2025}{x} + q$. Pour tout $r \neq 0$, on a $g(r) = g\left(\frac{1}{r}\right)$. En d'autres termes, r est une racine si et seulement si $\frac{1}{r}$ est aussi une racine.

Par exemple, si 3 et -7 sont des racines de $g(x)$, cela impliquerait que $g(x)$ a quatre racines : $\{3, -7, \frac{1}{3}, -\frac{1}{7}\}$. La seule façon que $g(x)$ ait *exactement trois* racines est que l'une d'elles soit une racine double, c'est-à-dire $r = \frac{1}{r}$.

Puisque $f(x)$ a exactement trois racines, cela signifie que $g(x)$ a également exactement trois racines. Cela implique qu'une de ces racines doit satisfaire $r^2 = 1$, c'est-à-dire $r = 1$ ou $r = -1$. Considérons ces deux cas.

Dans le premier cas, supposons que $r = 1$ est une racine de $f(x)$. Alors $0 = f(1) = p + 2025 + q + 2025 + p = 2p + q + 4050$, donc $q = -2p - 4050$.

On peut réécrire le polynôme $f(x)$ ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= px^4 + 2025x^3 + qx^2 + 2025x + p \\ &= px^4 + 2025x^3 + (-2p - 4050)x^2 + 2025x + p \\ &= (x^2 - 2x + 1)(px^2 + (2025 + 2p)x + p) \\ &= (x-1)^2(px^2 + (2025 + 2p)x + p). \end{aligned}$$

Si $f(x)$ a exactement trois racines *rationnelles*, alors les deux solutions de $px^2 + (2025 + 2p)x + p = 0$ doivent être rationnelles. Cela se produit précisément lorsque le discriminant est un carré parfait. Le discriminant est égal à

$$(2025+2p)^2-4\cdot p\cdot p = 2025^2+2025\cdot 4p+4p^2-4p^2 = 2025(2025+4p) = 45^2(2025+4p).$$

Ainsi, $f(x)$ a exactement trois racines rationnelles lorsque $2025 + 4p$ est un carré parfait. On sait que $2025 + 4p$ est un entier impair plus grand que $2025 = 45^2$, et donc on pose $2025 + 4p = 47^2$ pour trouver *lepluspetit* entier positif p dans ce cas. On trouve que $2025 + 4p = 2209$ implique $p = 46$.

Dans le deuxième cas, supposons que $r = -1$ est une racine de $f(x)$. Alors $0 = f(-1) = p - 2025 + q - 2025 + p = 2p + q - 4050$, donc $q = -2p + 4050$. On peut réécrire le polynôme $f(x)$ ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= px^4 + 2025x^3 + qx^2 + 2025x + p \\ &= px^4 + 2025x^3 + (-2p + 4050)x^2 + 2025x + p \\ &= (x^2 + 2x + 1)(px^2 + (2025 - 2p)x + p) \\ &= (x+1)^2(px^2 + (2025 - 2p)x + p). \end{aligned}$$

Si $f(x)$ a exactement trois racines *rationnelles*, alors les deux solutions de $px^2 + (2025 - 2p)x + p = 0$ doivent être rationnelles. Cela se produit précisément lorsque le discriminant est un carré parfait. Le discriminant est égal à

$$(2025-2p)^2-4\cdot p\cdot p = 2025^2-2025\cdot 4p+4p^2-4p^2 = 2025(2025-4p) = 45^2(2025-4p).$$

Ainsi, $f(x)$ a exactement trois racines rationnelles lorsque $2025 - 4p$ est un carré parfait. On sait que $2025 - 4p$ est un entier impair plus petit que $2025 = 45^2$, et donc on pose $2025 - 4p = 43^2$ pour trouver *lepluspetit* entier positif p dans ce cas. On trouve que $2025 - 4p = 1849$ implique $p = 44$.

Notre question demande le plus petit entier positif p pour lequel il existe un polynôme $f(x)$ ayant exactement trois racines rationnelles. D'après notre analyse, on voit que $p = 44$ est la bonne réponse, et dans ce cas $q = -2 \cdot 44 + 4050 = 3962$.

En effet, on peut vérifier que $f(x) = 44x^4 + 2025x^3 + 3962x^2 + 2025x + 44 = (x+1)^2(x+44)(44x+1)$, de sorte que ce polynôme a exactement trois racines rationnelles : $x = -1$, $x = -44$ et $x = -\frac{1}{44}$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(C)}}$