Repêchage de qualification de l'OMC 2025

Problèmes

1. **[10 points]** Résolvez l'équation suivante sachant que A, B et C sont des chiffres et que A et C sont nul : $\overline{ABCB} + 1434 = \overline{CABA}$.

2. **[10 points]** Soit ABC un triangle rectangle avec $\angle BAC = 90°$. Soient I et O le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, respectivement. On sait que $\angle IOB = 45°$. Déterminez tous les angles possibles de $\angle CBA$.

3. **[10 points]** Au départ, il y a 2024 boules vertes et 1 boule rouge dans une boîte. Toutes les minutes, Kate choisit une balle au hasard dans la boîte. Si elle est verte, elle la peint en bleu et la remet dans la boîte. Si elle est bleue, elle la peint en vert et la remet dans la boîte. Enfin, si elle est rouge, elle arrête le processus. Quel est le nombre attendu de boules vertes à la fin de son processus ?

4. **[10 points]** Supposons que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique infinie et que $\{b_n\}_{n\geq 1}$ est une suite géométrique infinie. Si l'on sait que $a_1 < a_2$, $b_i = a_i^2$ pour $i = 1, 2, 3$, et que
$$\lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \sqrt{2} + 1,$$
déterminez, preuve à l'appui, toutes les suites $\{a_n\}$ possibles.

5. **[10 points]** Trouvez toutes les fonctions$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $xy = f(x)f(y) - f(x+y)$ pour tous les nombres réels x et y.

6. **[15 points]** Dans le triangle scalène ABC, le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle inscrit sont respectivement O et I. Soit AD la hauteur abaissée sur BC, où D est situé sur la droite BC. Sachant que les rayons du cercle circonscrit et du A-cercle exinscrit sont égaux, montrez que les points O, I et D sont colinéaires.

7. **[15 points]** Est-il possible de disposer les nombres $1, 2, \ldots, 54^2$ dans une grille de 54×54 de telle sorte que deux cellules adjacentes verticalement ou horizontalement soient premiers entre eux ?

8. **[20 points]** Soit n un entier positif et soient $2n$ points également espacés sur un cercle. Montrez que pour tout entier $0 \leq k \leq \frac{n(n-1)}{2}$, il existe un moyen de tracer n segments de droite, chacun reliant deux points distincts, de telle sorte qu'exactement k paires de ces segments de droite se coupent.