# Qualification de l'Olympiade mathématique du Canada Repêchage 2025

*Un concours de la Société mathématique du Canada.*

## Solutions officielles

6 février 2025

**1.** [**10 points**] Résolvez l'équation suivante sachant que $A$, $B$ et $C$ sont des chiffres et que $A$ et $C$ sont nul  : $\overline{ABCB} + 1434 = \overline{CABA}$.

**Solution :** On commence notre analyse par le dernier chiffre, où on a deux cas à traiter :

— $B + 4 = A$. Ici on voit que $C + 3$ doit être égal à $B$. Sinon, on doit avoir $C + 3 = B + 10$ et le *plus 10* se reporte sur le chiffre suivant, où on a $B + 4 + 1 \equiv A \pmod{10}$ ce qui contredit le fait que $B + 4 = A$. On a donc $C + 3 = B$. Enfin, du chiffre des unités de mille, on tire que $A + 1 = C$. Ceci est une fois de plus impossible car $A = C - 1 = B - 4 = A - 8$. Il n'y a pas de solution dans ce cas.

— $B + 4 = 10 + A$. Ici, on doit avoir $C + 4 = B$, car sinon $C + 4 = B + 10$ ce qui signifie que l'addition sur le chiffre des dizaines sera reportée sur le chiffre des centaines, impliquant du coup que $B + 4 + 1 \equiv A \pmod{10}$ ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $B + 4 = 10 + A$. Enfin, au chiffre des unités de mille, on a $A + 2 = C$. En somme, on a donc $(A, B, C) = (A, A + 6, A + 2)$. Ici, on voit que $A$ peut être $1, 2$ ou $3$.

Les seuls triplets possibles de $(A, B, C)$ sont $(1, 7, 3)$, $(2, 8, 4)$ et $(3, 9, 5)$. $\square$

**2.** [**10 points**] Soit $ABC$ un triangle rectangle avec $\angle BAC = 90°$. Soient $I$ et $O$ le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$, respectivement. On sait que $\angle IOB = 45°$. Déterminez tous les angles possibles de $\angle CBA$.

**Solution :** Tout d'abord, notons que le centre du cercle circonscrit $O$ d'un triangle rectangle $ABC$ est le point milieu du segment de droite $BC$. De plus, notons $\angle B = \angle ABC$ et $\angle C = \angle BCA$. On voit donc que $\angle IOC = 180° - 45° = 135°$. De même, $\angle IAC = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$. Par conséquent, on voit que les points $A, I, O$ et $C$ sont concycliques.

Ainsi, on voit que

$$\angle OCI = \angle OAI \implies \angle B = \angle OAB = \angle OAI + \angle IAB = \frac{1}{2}\angle C + 45°$$

Puisque $\angle B + \angle C = 90°$, on peut déduire que $\angle C = 30°$ et $\angle B = 60°$.

Enfin, on vérifie que ce triangle fonctionne : on sait d'abord que $\triangle ABO$ est un triangle équilatéral et on peut calculer que $\angle IAO = \angle BAO - \angle BAI = 60° - 45° = 15° = \angle IAC$, ce qui implique que $A, I, O$ et $C$ sont concycliques, donc $\angle BOI = \angle IAC = 45°$, ce qui signifie que ce triangle fonctionne bel et bien. $\square$

**3.** [**10 points**] Au départ, il y a 2024 boules vertes et 1 boule rouge dans une boîte. Toutes les minutes, Kate choisit une balle au hasard dans la boîte. Si elle est verte, elle la peint en bleu et la remet dans la boîte. Si elle est bleue, elle la peint en vert et la remet dans la boîte. Enfin, si elle est rouge, elle arrête le processus. Quel est le nombre attendu de boules vertes à la fin de son processus ?

**Solution :** Étiquetons les boules vertes ainsi : $G_1, \ldots, G_{2024}$. Définissons la variable aléatoire indicatrice $I_n$ comme étant 1 si la boule est verte lorsque la boule rouge est tirée, et 0 si la boule est bleue lorsque la boule rouge est tirée. L'espérance du nombre de boules vertes à la fin du processus est $E(I_1 + I_2 + \cdots + I_{2024})$. De fait de la linéarité de l'espérance et de la symétrie de toutes les boules vertes, on voit que cette valeur attendue est égale à $2024E(I_1) = 2024 \cdot P(\text{la balle 1 est verte})$.

Pour calculer cette probabilité, on considère le processus de tirage des boules. À chaque étape, soit la boule $G_1$ est tirée, soit la boule rouge est tirée, soit l'une de $G_2, \ldots, G_{2024}$ est tirée. Notons que dans le dernier cas, cela n'affecte en rien le statut de la boule $G_1$. On peut donc écarter cette possibilité. Ainsi, on constate qu'à chaque étape, soit $G_1$ est tirée, soit la boule rouge est tirée, et ce, avec la même probabilité. On voit donc que pour que la boule soit verte à la fin, la boule doit être choisie exactement un nombre pair de fois avant que la boule rouge ne soit choisie. La probabilité est donc de

$$P(\text{la balle 1 est verte}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots = \frac{2}{3}$$

Ainsi, on constate que le nombre attendu de boules vertes à la fin est $\frac{4048}{3}$. $\square$

 

**4. [10 points]** Supposons que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique infinie et que $\{b_n\}_{n\geq 1}$ est une suite géométrique infinie. Si l'on sait que $a_1 < a_2$, $b_i = a_i^2$ pour $i = 1, 2, 3$, et que

$$\lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \sqrt{2} + 1,$$

déterminez, preuve à l'appui, toutes les suites $\{a_n\}$ possibles.

**Solution :** Tout d'abord, on peut laisser $a_1 = x - d, a_2 = x$ et $a_3 = x + d$. On voit donc que $b_1 = (x-d)^2, b_2 = x^2, b_3 = (x+d)^2$. Comme $b_\bullet$ forme une suite géométrique, on a que

$$(x-d)^2(x+d)^2 = b_1 b_3 = b_2^2 = x^4 \implies (x-d)(x+d) = x^2 - d^2 = \pm x^2$$

Notons qu'il n'est pas possible que $x^2 - d^2 = x^2$, car cela implique que $d = 0$, ce qui signifie que les deux suites sont constantes, et donc que la somme $\lim_{n\to\infty} b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ diverge. Il faut donc que $x^2 - d^2 = -x^2$. On voit donc que $2x^2 = d^2$. Ainsi, on voit que $d = \pm\sqrt{2}x$. Cela signifie que les trois premiers termes de la suite $b$ sont soit $\{(1+\sqrt{2})^2x^2, x^2, (1-\sqrt{2})^2x^2\}$ ou $\{(1-\sqrt{2})^2x^2, x^2, (1+\sqrt{2})^2x^2\}$. Dans le second cas, on voit que la suite est croissante, donc une fois de plus, la somme diverge. Dans le premier, cas, on voit que la suite est donnée par $a_n = (3-2\sqrt{2})^{n-1}(3+2\sqrt{2})x^2$.

Enfin, il suffit de résoudre l'équation que voici :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} + 1 &= \lim_{n\to\infty} b_1 + \cdots + b_n \\
&= (3+2\sqrt{2})x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}-2} \\
1 &= \frac{1}{2}(3+2\sqrt{2})x^2 \\
x^2 &= 6 - 4\sqrt{2}
\end{aligned}$$

On a donc $x = 2 - \sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2} - 2$. Par conséquent, le premier terme sera soit $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$, respectivement. Cela donne donc deux suites possibles : $\{\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}, \ldots\}$ ou $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}-2, \ldots\}$. $\square$

 

**5.** [**10 points**] Trouvez toutes les fonctions$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $xy = f(x)f(y) - f(x+y)$ pour tous les nombres réels $x$ et $y$.

**Solution :** On affirme que les solutions sont $f(x) = 1 \pm x$. Il est facile de vérifier que ces solutions satisfont l'équation fonctionnelle.

Pour montrer que ce sont les seules solutions, on insère d'abord $y = 0$ dans l'équation originale pour obtenir $f(0)f(x) = f(x)$ pour tout $x$. Il est évident que $f(x)$ ne peut pas être 0 pour tout $x$, donc on obtient $f(0) = 1$.

Insérons ensuite $x = 1$ et $y = 1$ pour obtenir $f(1)f(-1) = 0$. On considère ensuite deux cas selon lequel de $f(1)$ et $f(-1)$ est zéro.

**Cas 1 :** $f(1) = 0$. Dans ce cas, insérons $y = 1$ pour obtenir $f(x+1) = -x$, et par un changement de variable on obtient $f(x) = 1 - x$ pour tout $x$.

**Cas 2 :** $f(-1) = 0$. Dans ce cas, insérons $y = -1$ pour obtenir $f(x-1) = x$. De nouveau, par un changement de variable on obtient $f(x) = 1 + x$ pour tout $x$. $\square$

**6. [15 points]** Dans le triangle scalène $ABC$, le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle inscrit sont respectivement $O$ et $I$. Soit $AD$ la hauteur abaissée sur $BC$, où $D$ est situé sur la droite $BC$. Sachant que les rayons du cercle circonscrit et du $A$-cercle exinscrit sont égaux, montrez que les points $O$, $I$ et $D$ sont colinéaires.

**Solution :** Soit $I_A$ le $A$-cercle exinscrit au triangle $ABC$, $T$ le point milieu de $II_A$, $M$ le point milieu de $BC$, $X$ le pied de la perpendiculaire de $I$ à $BC$, $Y$ la réflexion de $X$ sur $M$, et $Z$ la réflexion de $X$ sur $I$.

Par des lemmes classiques (voir les points 2 et 4 ici : https ://yufeizhao.com/olympiad/geolemmas.pdf), on a que $A, Z$ et $Y$ sont colinéaires, $O, M$ et $T$ sont colinéaires, $T$ se trouve sur le cercle circonscrit au triangle $ABC$, et $Y$ est le pied de la perpendiculaire de $I_A$ à $B$. Soit $U$ le point milieu de $ZY$ ; il est sur la droite $OMT$.

On utilise maintenant la condition principale du problème, à savoir que $OT = YI_A$. Comme ces deux droites sont toutes deux perpendiculaires à $BC$, elles sont parallèles, et donc $OYI_AT$ est un parallélogramme. Puisque $IT = TI_A$, on voit que $OITY$ est aussi un parallélogramme. Notons que $I$ et $U$ sont respectivement les points milieux de $ZX$ et $ZY$, donc $IU$ est parallèle à $BC$. Puisque $U$ est l'intersection des diagonales du trapèze $ATYO$, on obtient $AU/UY = OU/UT$. En ajoutant 1 aux deux côtés, on voit que $AY/UY = OT/UT$. En projetant le rapport $AY/UY$ sur une droite perpendiculaire à $BC$, on obtient $AY/UY = AD/UM = AD/IZ$. De plus, à partir des triangles $AZI$ et $AUT$, on a $UT/IZ = TI/AI$. En combinant tout cela, on voit que $TI/AI = UT/IZ = OT/AD$, et donc par la condition Côté-Angle-Côté, les triangles $ADI$ et $TOI$ sont semblables, d'où l'on tire que $O, I$ et $D$ sont colinéaires. $\square$

 

**7. [15 points]** Est-il possible de disposer les nombres $1, 2, \ldots, 54^2$ dans une grille de $54 \times 54$ de telle sorte que deux cellules adjacentes verticalement ou horizontalement soient premiers entre eux ?

**Solution :** Oui, c'est possible. La construction suivante utilise le fait que $54^2 + 1 = 2917$ et $54^2 + 54 + 1 = 2971$ sont des nombres premiers. Définissons

$$a_{2i+1,j} = 54i + j,$$

où $i \in [0, 26]$ et $j \in [1, 54]$, et

$$a_{2i,j} = 2971 - 54i - j,$$

où $i \in [1, 27]$ et $j \in [1, 54]$. On peut vérifier que chaque nombre de 1 à $54^2$ est utilisé exactement une fois ; les nombres de 1 à $27 \cdot 54$ sont utilisés dans les rangées impaires, et le reste est utilisé dans les rangées paires.

Il est donc clair que deux cellules dont les secondes coordonnées diffèrent de 1 sont copremières, puisque le contenu des cellules diffère de 1. Quant aux cellules dont les premières coordonnées diffèrent de 1, on a

$$a_{2i,j} + a_{2i+1,j} = 2971$$

et

$$a_{2i+1,j} + a_{2i+2,j} = 2917,$$

et toute paire de nombres positifs dont la somme est égale à un nombre premier est copremière. $\square$

**8.** **[20 points]** Soit $n$ un entier positif et soient $2n$ points également espacés sur un cercle. Montrez que pour tout entier $0 \leq k \leq \frac{n(n-1)}{2}$, il existe un moyen de tracer $n$ segments de droite, chacun reliant deux points distincts, de telle sorte qu'exactement $k$ paires de ces segments de droite se coupent.

**Solution :** On remarque tout d'abord que si on relie des points diamétralement opposés, il y aura $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ paires de droites qui se croisent, car toutes les paires de droites se croisent. On va maintenant procéder par induction de la manière suivante :

**Affirmation principale :** Étant donné $n$ segments de droite qui relient chacun deux points distincts, avec au moins une paire de droites qui se croisent, il existe des points $A, B, C$ et $D$ dans cet ordre sur le cercle, tels que $AC$ et $BD$ sont originellement reliés, et en remplaçant ces segments par $AB$ et $CD$, il y aura une paire de droites de moins qui se croisent.

Il est clair que cette affirmation résoudra le problème, puisqu'on pourra diminuer itérativement le nombre de paires de droites qui se croisent de 1 jusqu'à ce qu'aucune paire de droites ne se croise.

Soit $\mathcal{W}$ l'ensemble des points de l'arc $AB$ n'incluant pas $C$ et $D$, et définissons $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ pour les arcs $BC, CD$ et $DA$, respectivement. Notons que les $n-2$ autres droites restent les mêmes, donc le nombre d'intersections en leur sein reste le même ; $AC$ et $BD$ se croisent et ils sont remplacés par $AB$ et $CD$, qui ne se croisent pas. Pour cela, afin de comparer la variation du nombre d'intersections, il suffit de considérer les droites dont l'une n'est pas issue de l'ensemble de points $\{A, B, C, D\}$ et l'autre l'est. On travaillera sur l'endroit où se trouve la première des droites ci-dessus.

Tout d'abord, notons que si la droite contient deux points du même ensemble parmi $\mathcal{W}$, $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$, alors elle ne coupe aucun de $AC, BD, AB$ et $CD$, donc le nombre d'intersections ne change pas. Si un point est dans $\mathcal{W}$ ou $\mathcal{Y}$, et l'autre dans $\mathcal{X}$ ou $\mathcal{Z}$, alors il coupe exactement un parmi $AC$ et $BD$ et exactement un parmi $AB$ et $CD$. Donc, encore une fois, le nombre d'intersections ne change pas. Si un point est dans $\mathcal{W}$ et l'autre dans $\mathcal{Y}$, alors il coupe chacun de $AC, BD, AB$ et $CD$. Donc, encore une fois, le nombre d'intersections ne change pas. Enfin, si un point est dans $\mathcal{X}$ et l'autre dans $\mathcal{Z}$, alors il coupe à la fois $AC$ et $BD$ mais ni $AB$ ni $CD$. Donc le nombre d'intersections diminue de 2.

À cette fin, il suffit de choisir des points $A, B, C$ et $D$ tels que $AC$ et $BD$ soient des droites dans la configuration originale et qu'il n'y ait pas de droites reliant un point de $\mathcal{X}$ à $\mathcal{Z}$. Pour ce faire, on considère la paire de droites $AC$ et $BD$ pour laquelle le nombre de points dans $\mathcal{X}$ (c'est-à-dire entre $B$ et $C$ sur l'arc ne contenant pas $A$ et $D$) est minimal. Supposons qu'il existe $E \in \mathcal{X}$ et $F \in \mathcal{Z}$. Alors les droites $FE$ et $BD$ se coupent et l'arc $BE$ n'incluant pas $F$ et $D$ a strictement moins de points que $\mathcal{X}$, ce qui est une contradiction. Ceci nous donne le quadruplet désiré pour prouver l'affirmation principale. $\square$

 