Concours mathématique du lynx du Canada

Solutions définitives

Un concours de la Société mathématique du Canada.

Partie A : 4 points chacune

1. Soit $S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64$. Quelle est la valeur de S?

   (A) 31 **(B)** 33 **(C)** 41 **(D)** 43

Solution : On réécrit l'expression ainsi : $S = 1 + (-2 + 4) + (-8 + 16) + (-32 + 64)$, ce qui nous permet de constater que la réponse souhaitée est $1 + 2 + 8 + 32 = 43$.

Réponse : $\boxed{\text{(D)}}$

2. Si le 1 décembre est un dimanche, quel jour de la semaine le 14 décembre sera-t-il ?

   (A) Vendredi **(C)** Dimanche
   (B) Samedi **(D)** Lundi

Solution : On sait qu'il y a sept jours dans une semaine. Ainsi, si le 1er décembre tombe un dimanche (comme c'est le cas en 2024), le 8 décembre doit également tomber un dimanche, de même que le 15 décembre.

Le 14 décembre précède le 15 décembre et le samedi précède le dimanche.

Par conséquent, si le 1er décembre a lieu un dimanche, le 14 décembre doit avoir lieu un samedi.

Réponse : $\boxed{\text{(B)}}$

3. Si x et y satisfont $3x - y = 16$ et $3y - x = 24$, quelle est la valeur de $5x + 5y$?

   (A) 40 **(B)** 50 **(C)** 80 **(D)** 100

Solution : Une façon de répondre à cette question est de résoudre le système de deux équations, afin de déterminer les valeurs de x et y.

Par exemple, si on multiplie la première équation par 3 et qu'on l'ajoute à la deuxième équation, on obtient

$$3(3x - y) + 1(3y - x) = 3 \times 16 + 1 \times 24$$

Et cela se simplifie ainsi : $9x - 3y + 3y - x = 48 + 24$, où $8x = 72$ et on obtient donc $x = 9$.

Comme $3x - y = 16$, on sait que $y = 3x - 16$, ainsi $x = 9$ implique que $y = 3 \times 9 - 16 = 27 - 16 = 11$.

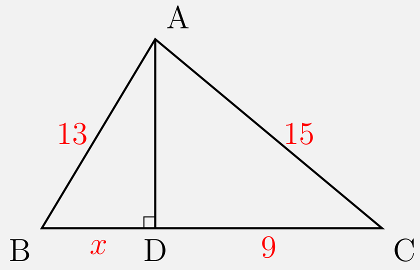
Comme $x = 9$ et $y = 11$, on conclut que $5x + 5y = 5 \times 9 + 5 \times 11 = 45 + 55 = 100$.

Bien que la solution ci-dessus soit correcte, une solution beaucoup plus perspicace et élégante consiste à exploiter la symétrie des deux équations. Si on additionne les deux équations, on constate que le côté gauche donne $(3x - y) + (3y - x) = 2x + 2y$ et que le côté droit donne $16 + 24 = 40$.

Puisque $2x + 2y = 40$, on sait que $x + y = 20$. On voit donc immédiatement que $5x + 5y = 5(x + y) = 5 \times 20 = 100$ et on répond à la question sans avoir à résoudre par rapport aux variables x et y.

Réponse : $\boxed{\textbf{(D)}}$

4. Dans $\triangle ABC$, D est sur le côté BC de sorte que AD est perpendiculaire à BC.



Comme illustré dans le diagramme, $AB = 13$, $AC = 15$, $CD = 9$ et $BD = x$. Quelle est la valeur de x?

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8

Solution : Par le théorème de Pythagore, on sait que $AD^2 + CD^2 = AC^2$, ce qui implique que $AD^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144$, d'où $AD = \sqrt{144} = 12$.

Une fois de plus, par le théorème de Pythagore, on sait que $AD^2 + BD^2 = AB^2$, d'où $12^2 + x^2 = 13^2$. Par conséquent, $x^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$ et donc $x = \sqrt{25} = 5$.

On peut également obtenir la réponse sans trouver AD. À partir des deux équations $AD^2 + CD^2 = AC^2$ et $AD^2 + BD^2 = AB^2$, on sait que $AD^2 = AC^2 - CD^2 = AB^2 - BD^2$, ce qui implique que $15^2 - 9^2 = 13^2 - x^2$.

Il s'ensuit que $x^2 = 13^2 + 9^2 - 15^2 = 169 + 81 - 225 = 25$ et on conclut donc que $x = \sqrt{25} = 5$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(A)}}$

5. Si $2^7 + 2^7 + 2^8 + 2^7 + 2^7 + 2^8 = 4^x$, quelle est la valeur de x?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 8 **(D)** 10

Solution : Comme $2^7 + 2^7 = 2 \times 2^7 = 2^1 \times 2^7 = 2^{1+7} = 2^8$, on peut réécrire le côté gauche comme $2^8 + 2^8 + 2^8 + 2^8$.

On voit que $2^8 + 2^8 + 2^8 + 2^8 = 4 \times 2^8 = 2^2 \times 2^8 = 2^{2+8} = 2^{10}$.

Notre but est de déterminer la valeur de x pour laquelle $2^{10} = 4^x$. La façon la plus simple de le faire est d'observer que $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$, d'où $2^{10} = 2^{2x}$. On en conclut que $10 = 2x$, d'où $x = 5$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(B)}}$

Partie B: 5 points chacune

6. On définit $f(x) = x^2 - 3x + 5$ pour tout nombre réel x. Quelle est la plus petite valeur possible de $f(x)$?

(A) 2 **(B)** $\frac{9}{4}$ **(C)** $\frac{5}{2}$ **(D)** $\frac{11}{4}$ **(E)** 3

Solution : Notons que $f(x) = x^2 - 3x + 5 = x(x-3) + 5$, et donc $f(x)$ est une parabole passant par les deux points $(0, 5)$ et $(3, 5)$. L'observation-clé est que la plus petite valeur de $f(x)$ se produit lorsque $x = \frac{3}{2}$, à savoir le point médian de $x = 0$ et $x = 3$.

Pour le prouver, on peut multiplier les deux côtés par 4 pour obtenir $4f(x) = 4x^2 - 12x + 20 = (4x^2 - 12x) + 20$. On effectue alors une *complétion de carré* afin d'obtenir $4f(x) = (4x^2 - 12x + 9) + 11 = (2x - 3)(2x - 3) + 11 = (2x - 3)^2 + 11$.

En divisant les deux côtés par 4, on obtient $f(x) = \frac{(2x-3)^2}{4} + \frac{11}{4}$. Puisque tout carré parfait est non négatif, on voit immédiatement que la plus petite valeur de $f(x)$ doit se produire lorsque $2x - 3 = 0$, ce qui implique que $x = \frac{3}{2}$.

Pour cette valeur de x, on voit que $f(x) = 0 + \frac{11}{4} = \frac{11}{4}$. Pour toutes les autres valeurs de x, on a $f(x) > 0 + \frac{11}{4} = \frac{11}{4}$. La plus petite valeur possible de $f(x)$ doit donc être $\frac{11}{4}$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(D)}}$

7. La parabole $y = -x^2 + 10x - 16$ a pour sommet le point A et coupe l'axe des x aux points B et C. Quelle est l'aire de $\triangle ABC$?

   (A) 15 **(B)** 27 **(C)** 30 **(D)** 36 **(E)** 54

Solution : Tout comme à la question précédente, on peut *compléter le carré* pour trouver l'abscisse du sommet. On observe que $y = -x^2 + 10x - 16 = -(x^2 - 10x) - 16 = -(x^2 - 10x + 25) + 25 - 16 = -(x - 5)^2 + 9$.

Ainsi, le sommet de la parabole doit se trouver en $x = 5$, ce qui implique que $y = 9$. Le point A a donc pour coordonnées $(5, 9)$.

On sait que la parabole coupe l'axe des x, dont l'équation est $y = 0$, aux points B et C. Pour obtenir ces coordonnées, on résout $0 = -x^2 + 10x - 16$. On voit que $0 = -(x - 2)(x - 8)$, ce qui implique que $x = 2$ et $x = 8$. Ainsi, les points B et C ont pour coordonnées$(2, 0)$ et $(8, 0)$.

On observe alors que $\triangle ABC$ a pour longueur $BC = 8 - 2 = 6$ et pour hauteur 9. L'aire de ce triangle doit donc être $\frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(B)}}$

8. On dit qu'un entier positif est *heureux* si la somme de ses chiffres est un multiple de 5. Par exemple, 64 est heureux car $6 + 4 = 10$ et 10 est un multiple de 5.

   Combien d'entiers positifs compris entre 10 et 99 sont heureux ?

   (A) 14 **(B)** 15 **(C)** 16 **(D)** 17 **(E)** 18

Solution : Supposons que les deux chiffres sont x et y, où x est le chiffre des dizaines et y est le chiffre des unités.

On sait que $x + y$ est au moins égal à $1 + 0 = 1$ et au plus égal à $9 + 9 = 18$. Ainsi, un entier à deux chiffres est heureux si $x + y$ est égal à 5 ou 10 ou 15.

On sait que $1 \leq x \leq 9$ et $0 \leq y \leq 9$. On considère les trois cas

Si $x + y = 5$, alors (x, y) peut être n'importe lequel des éléments suivants : $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)$. Cela correspond aux nombres heureux 14, 23, 32, 41, 50.

Si $x + y = 10$, alors (x, y) peut être n'importe lequel des éléments suivants : $(1, 9)$, $(2, 8)$, $(3, 7)$, $(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$, $(7, 3)$, $(8, 2)$, $(9, 1)$. Cela correspond aux nombres heureux 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91.

Si $x + y = 15$, alors (x, y) peut être n'importe lequel des éléments suivants : $(6, 9), (7, 8), (8, 7), (9, 6)$. Cela correspond aux nombres heureux 69, 78, 87, 96.

Au total, il y a $5 + 9 + 4 = 18$ nombres heureux.

Réponse : $\boxed{\textbf{(E)}}$

9. Supposons qu'on remplisse la grille 3×3 suivante avec des nombres entiers tels que la somme de chaque ligne égale à 0, la somme de chaque colonne égale à 0 et la somme de chaque diagonale égale à 0.

	-4	
		2
x		

Quelle est la valeur de x?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1 **(E)** 2

Solution : Étiquetons les neuf cellules de la grille comme suit :

A	B	C
D	E	F
G	H	I

On démontre d'abord que la cellule centrale *doit* être 0.

Puisque la somme de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale est égale à 0, on sait que $A+E+I=0$, $B+E+H=0$ et $C+E+G=0$.

En additionnant les trois équations, on obtient $A+E+I+B+E+H+C+E+G=0$, que l'on réécrit sous la forme $(A+B+C)+3E+(G+H+I)=0$. Puisque la somme de chaque ligne est 0, on sait que $0+3E+0=0$, ce qui implique que $3E=0$, d'où $E=0$.

Ainsi, on a montré que la cellule centrale est $E=0$ et on sait aussi que $G=x$, $B=-4$ et $F=2$. Par conséquent, $C=0-E-G=-x$ et $H=0-B-E=4$.

A	-4	-x
D	0	2
x	4	I

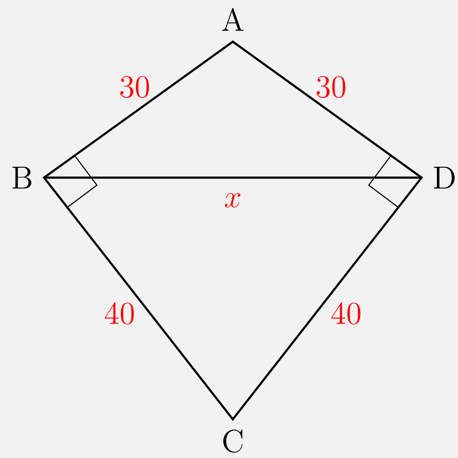
Puisque la somme de la dernière ligne est 0, on doit avoir $I = -x - 4$. Puisque la somme de la dernière colonne est 0, on doit avoir $I = x - 2$. Il s'ensuit que $-x - 4 = x - 2$, et donc $2x = -2$, d'où $x = -1$.

Notons qu'on peut également obtenir la bonne réponse sans réaliser que $E = 0$. D'après les équations $C+E+G = 0$, $G+H+I = 0$, $C+F+I = 0$, $B+E+H = 0$, on sait que $0 = (C+E+G)+(G+H+I)-(C+F+I)-(B+E+H) = 2G - F - B$. Par conséquent, $G = \frac{B+F}{2}$.

Comme $G = x$, $B = -4$ et $F = 2$, on conclut que $x = \frac{-4+2}{2} = -1$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(B)}}$

10. Dans le diagramme ci-dessous, $ABCD$ est un quadrilatère avec $AD = AB = 30$, $CD = CB = 40$ et $\angle ADC = \angle ABC = 90°$.



Quelle est la longueur du segment de droite BD?

(A) 24 **(B)** 36 **(C)** 48 **(D)** 50 **(E)** 72

Solution : On détermine la longueur de BD en calculant l'aire du quadrilatère de deux façons différentes. Soit S cette aire, et soit E le point d'intersection des diagonales AC et BD.

L'aire du quadrilatère est la somme des aires de $\triangle ABD$ et $\triangle CBD$. Les deux triangles ont une longueur de BD et leurs hauteurs totalisent AC.

Ainsi, $S = \frac{1}{2} \times BD \times AE + \frac{1}{2} \times BD \times EC = \frac{1}{2} \times BD \times (AE + EC) = \frac{1}{2} \times BD \times AC$.

On sait également que l'aire du quadrilatère est la somme des aires de $\triangle ABC$ et $\triangle ADC$. Les deux triangles sont des triangles rectangles dont les côtés mesurent 30 et 40.

Ainsi, $S = \frac{1}{2} \times 30 \times 40 + \frac{1}{2} \times 30 \times 40 = 30 \times 40 = 1200$.

On a montré que $\frac{1}{2} \times BD \times AC = 1200$, ce qui implique que $BD = \frac{2400}{AC}$.

Puisque AC est l'hypoténuse du triangle rectangle $\triangle ABC$, on sait par le théorème de Pythagore que

$$AC = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50.$$

Comme $AC = 50$, on conclut que $BD = \frac{2400}{50} = 48$.

On peut également résoudre le problème en utilisant les triangles semblables, en notant que $\triangle ABC$ est similaire à $\triangle AEB$. On voit que $\frac{EB}{AB} = \frac{BC}{AC}$, et donc $EB = \frac{BC \times AB}{AC} = \frac{40 \times 30}{50} = \frac{1200}{50} = 24$.

Comme $EB = 24$, on voit que $BD = 2EB = 48$, et donc, une fois de plus, on voit que $BD = 48$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(C)}}$

Partie C: 7 points chacune

11. Pour chaque fonction $f(x)$, on définit $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ pour tout $n \geq 1$.

Par exemple, si $f(x) = x + 2$ alors $f^3(3) = f(f^2(3)) = f(f(f(3))) = f(f(5)) = f(7) = 9$.

Si $f(x) = \dfrac{-4}{x+2}$, quel est le nombre entier le plus proche de $f^{2024}(2024)$?

(A) -2024 **(C)** 0 **(E)** 4
(B) -2 **(D)** 2 **(F)** 2024

Solution : On va prouver que $f^3(x) = x$ pour toutes les valeurs de x sauf pour $x = -2$, où la fonction n'est pas définie.

Comme $f(x) = \frac{-4}{x+2}$, on a

$$\begin{aligned}
f^2(x) &= f(f(x)) \\
&= f\left(\frac{-4}{x+2}\right) \\
&= \frac{-4}{\frac{-4}{x+2} + 2} \\
&= \frac{-4}{\frac{-4}{x+2} + \frac{2x+4}{x+2}} \\
&= \frac{-4}{\frac{2x}{x+2}} \\
&= \frac{-4(x+2)}{2x} \\
&= \frac{-2x-4}{x}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{-2x-4}{x}\right) = \frac{-4}{\frac{-2x-4}{x} + 2} = \frac{-4}{\frac{-2x-4}{x} + \frac{2x}{x}} = \frac{-4}{\frac{-4}{x}} = \frac{-4x}{-4} = x$$

Comme $f^3(x) = x$, cela implique que $f^4(x) = f(f^3(x)) = f(x)$. Cela implique à son tour que $f^5(x) = f(f^4(x)) = f(f(x)) = f^2(x)$.

Un argument similaire montre que $f^6(x) = f^3(x)$, $f^7(x) = f^4(x)$, et ainsi de suite. Ainsi, la suite $f(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x), f^5(x), f^6(x), \ldots$ se répète tous les trois termes.

Puisque 2024 donne un reste de 2 lorsque divisé par 3, on sait que $f^{2024}(x) = f^2(x) = \frac{-2x-4}{x}$. Et ainsi

$$f^{2024}(2024) = f^2(2024) = \frac{-2 \times 2024 - 4}{2024} = -2 - \frac{4}{2024}$$

Puisque $\frac{4}{2024}$ est un très petit nombre (approximativement égal à $0,002$), l'entier le plus proche de $f^{2024}(2024)$ est -2.

Réponse : $\boxed{\textbf{(B)}}$

12. Soit $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{12}$ une suite d'entiers positifs avec $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_{12}$.

    Cette suite a la propriété que chaque terme t_n (où $3 \leq n \leq 12$) est la somme des deux termes précédents.

    Si $t_7 = 184$, quelle est la valeur de t_{12}?

(A) 2024	**(C)** 2032	**(E)** 2042
(B) 2027	**(D)** 2037	**(F)** 2047

Solution : Soient $t_1 = x$ et $t_2 = y$ pour des entiers positifs x et y. Puisque notre suite est croissante, on sait que $x < y$.

Comme chaque terme est la somme des deux termes précédents, on a $t_3 = t_1 + t_2 = x + y$ et $t_4 = t_2 + t_3 = y + (x + y) = x + 2y$.

En continuant ainsi, on peut montrer que $t_5 = 2x + 3y$, $t_6 = 3x + 5y$, $t_7 = 5x + 8y$, $t_8 = 8x + 13y$, $t_9 = 13x + 21y$, $t_{10} = 21x + 34y$, $t_{11} = 34x + 55y$ et $t_{12} = 55x + 89y$.

On nous donne $t_7 = 5x + 8y = 184$ et notre but est de déterminer la valeur de $t_{12} = 55x + 89y$.

Notons que $t_{12} = 55x+89y = 55x+88y+y = 11(5x+8y)+y = 11\times184+y = 2024 + y$. Ainsi, pour calculer la valeur de t_{12}, il suffit de calculer la valeur de y.

On sait que x et y sont des entiers positifs avec $x < y$ pour lesquels $5x+8y = 184$. Puisque $5x$ est un multiple positif de 5, on sait que $184-8y = 8(23-y)$ doit aussi être un multiple positif de 5. Il suffit de vérifier les valeurs de $y > 0$ pour lesquelles $23 - y$ est un multiple positif de 5, à savoir $y = 3$, $y = 8$, $y = 13$ et $y = 18$.

Ces valeurs correspondent aux solutions $(x, y) = (32, 3)$, $(x, y) = (24, 8)$, $(x, y) = (16, 13)$ et $(x, y) = (8, 18)$. Une seule de ces solutions, à savoir $(x, y) = (8, 18)$ satisfait la propriété $0 < x < y$.

Par conséquent, on conclut que $y = 18$ et donc t_{12} doit être égal à $2024+y = 2042$.

On peut vérifier que la suite $8, 18, 26, 44, 70, 114, 184, 298, 482, 780, 1262, 2042$ satisfait aux conditions du problème.

Réponse : $\boxed{\textbf{(E)}}$

13. Nous jouons au jeu suivant où vous commencez avec 2 points.

On vous donne une pièce de monnaie équitable qui tombe sur Pile avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et sur Face avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

Vous jouez à pile ou face six fois de suite. À chaque fois que vous obtenez Pile, le nombre de points est *multiplié* par 10. À chaque fois que vous obtenez Face, le nombre de points *augmente* de 2. Votre résultat final est le nombre de points que vous avez à la fin des six tirages à pile ou face.

Par exemple, si vous obtenez Pile, Face, Face, Face, Face, Pile, votre résultat final est $(2 \times 10 + 2 + 2 + 2 + 2) \times 10 = 280$.

Et si vous obtenez Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, votre résultat final est $(2 \times 10 \times 10 + 2) \times 10 + 2 + 2 = 2024$.

Quelle est la probabilité que votre résultat final soit supérieur à 2024 ?

(A) $\frac{11}{32}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{5}{8}$
(B) $\frac{3}{8}$ **(D)** $\frac{19}{32}$ **(F)** $\frac{21}{32}$

Solution : Supposons que vous ayez un résultat de N points. Si vous faites Pile puis Face, vous obtenez $10N + 2$ points et si vous faites Face puis Pile, vous obtenez $(N + 2) \times 10 = 10N + 20$ points.

Puisque $10N + 20 > 10N + 2$, on observe qu'étant donné n'importe quelle suite de lancés (par exemple PPFPFF), où Pile = P et Face = F , on peut *augmenter* le résultat final en changeant n'importe que PF consécutif en FP, et *diminuer* le résultat final en changeant n'importe quel FP consécutif en PF. Chaque changement affecte le résultat final mais ne modifie pas le nombre de Pile et Face dans notre suite.

Par exemple, si on remplace P$\underline{\text{P}}$FPFF par P$\underline{\text{F}}$PPFF, le résultat final passe de 2024 à 2204, et si on remplace PP$\underline{\text{F}}$PFF par PP$\underline{\text{P}}$FFF, le nombre de points diminue de 2024 à 2006.

Si la suite a 4 Pile et 2 Face, on voit que le résultat final *minimum* se produit lorsque la suite est PPPPFF, et le résultat final est $2\times10\times10\times10\times10+2+2 = 20004 > 2024$. De même, si la suite a 5 Pile ou 6 Pile, on peut aisément voir que le résultat final est assuré d'excéder 2024.

Si la suite a 2 Pile et 4 Face, on voit que le résultat final *maximum* se produit lorsque la suite est FFFFPP, et le résultat final est $(2+2+2+2+2)\times10\times10 = 1000 < 2024$. De même, si la suite a 1 Pile ou 0 Pile, on peut aisément voir que le résultat final est assuré d'être inférieur à 2024.

Le seul scénario intéressant à considérer est donc celui où la suite comporte 3 Pile et 3 Face. Il y a $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{720}{6\times6} = 20$ façons différentes qu'une suite de 6 lancés ait 3 Pile et 3 Face.

Si la suite commence par F, le résultat final minimum se produit lorsque la suite est FPPPFF, avec un résultat final de $(2+2)\times10\times10\times10+2+2 = 4004$, et si la suite commence par PF, le résultat final minimum se produit lorsque la séquence est PFPPFF, avec un résultat final de $(2\times10+2)\times10\times10+2+2 = 2204$.

Ainsi, toutes les suites avec 3 Pile et 3 Face qui commencent par F ou PF sont assurées d'avoir un résultat final supérieur à 2024.

Il suffit de considérer les quatre scénarios où la suite commence par PP.

Si la suite est PPPFFF, le résultat final est de $2\times10\times10\times10+2+2+2 = 2006$.
Si la suite est PPFPFF, le résultat final est de $(2\times10\times10+2)\times10+2+2 = 2024$.
Si la suite est PPFFPF, le résultat final est de $(2\times10\times10+2+2)\times10+2 = 2042$.
Si la suite est PPFFFP, le résultat final est de $(2\times10\times10+2+2+2)\times10 = 2060$.

Parmi les $\binom{6}{3} = 20$ différentes façons dont une séquence de 6 lancés a 3 Pile et 3 Face, on voit que pour toutes les suites sauf deux (PPPFFF, PPFPFF), le résultat final est supérieur à 2024.

Il y a $\binom{6}{K} = \frac{6!}{K!(6-K)!}$ façons qu'une suite de 6 lancés ait K Pile et $6 - K$ Face. D'après notre analyse ci-dessus, il y a $\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} + (\binom{6}{3} - 2) = 15 + 6 + 1 + 18 = 40$ façons dont le résultat final est supérieur à 2024.

Puisque tous les $2^6 = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 64$ suites sont également susceptibles de se produire, la probabilité souhaitée est $\frac{40}{64} = \frac{5}{8}$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(E)}}$

14. Pour chaque entier positif n, définissons $S(n)$ comme étant la somme des diviseurs positifs de n et définissons $P(n)$ comme étant le nombre de diviseurs premiers de n.

    Par exemple, $S(20) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 = 42$ et $P(20) = 2$ car les seuls diviseurs premiers de 20 sont 2 et 5.

    Si n est un entier positif pour lequel $S(n) > 4n$, quelle est la valeur minimale possible de $P(n)$?

    (A) 1 **(C)** 3 **(E)** 5
    (B) 2 **(D)** 4 **(F)** 6

Solution : Soit $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ la factorisation première de n, où chaque p_i est premier et chaque a_i est un entier positif.

Tout diviseur de n ne doit contenir que les nombres premiers de l'ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ et être de la forme $p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k}$, où $0 \leq b_i \leq a_i$ pour chaque $1 \leq i \leq k$.

Puisque chaque b_i peut être compris entre 0 et a_i, il y a $a_i + 1$ options pour chaque terme $p_i^{b_i}$. Et ceci est vrai pour chaque indice i de 1 à k. On constate donc que $S(n)$, la somme de tous les diviseurs positifs de n, doit être égale à

$$S(n) = (p_1^0 + p_1^1 + \ldots + p_1^{a_1}) \cdot (p_2^0 + p_2^1 + \ldots + p_2^{a_2}) \cdots (p_k^0 + p_k^1 + \ldots + p_k^{a_k}).$$

Considérons le premier terme $(p_1^0 + p_1^1 + \ldots + p_1^{a_1})$, qui est la somme des premiers termes $a_1 + 1$ d'une suite géométrique de premier terme p_1^0 et de raison p_1. Soit T ce total, on a les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} T &= p_1^0 + p_1^1 + p_1^2 + p_1^3 + \ldots + p_1^{a_1} \\ p_1T &= p_1^1 + p_1^2 + p_1^3 + p_1^4 + \ldots + p_1^{a_1+1} \end{aligned}$$

La deuxième équation est formée en multipliant la première équation par p_1. Si l'on soustrait la première équation de la seconde, on obtient

$$p_1T - T = (p_1^1 + p_1^2 + p_1^3 + p_1^4 + \ldots + p_1^{a_1+1}) - (p_1^0 + p_1^1 + p_1^2 + p_1^3 + \ldots + p_1^{a_1}) = p_1^{a_1+1} - p_1^0.$$

Par conséquent $p_1T - T = p_1^{a_1+1} - p_1^0$, ce qui est équivalent à $T(p_1 - 1) = p_1^{a_1+1} - 1$, d'où $T = \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1}$.

On a montré que le premier terme de notre produit $S(n)$ est égal à $\frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1}$, et on obtient une formule similaire pour tous les autres termes. Par conséquent,

$$S(n) = \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_k^{a_k+1}-1}{p_k-1}.$$

Comme $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, on a

$$\frac{S(n)}{n} = \frac{S(n)}{p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}} = \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1^{a_1}(p_1-1)} \cdot \frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2^{a_2}(p_2-1)} \cdots \frac{p_k^{a_k+1}-1}{p_k^{a_k}(p_k-1)}.$$

Et cela se simplifie ainsi :

$$\frac{S(n)}{n} = \frac{p_1 - \frac{1}{p_1^{a_1}}}{p_1-1} \cdot \frac{p_2 - \frac{1}{p_2^{a_2}}}{p_2-1} \cdots \frac{p_k - \frac{1}{p_k^{a_k}}}{p_k-1} < \frac{p_1-0}{p_1-1} \cdot \frac{p_2-0}{p_2-1} \cdots \frac{p_k-0}{p_k-1}.$$

Dans la question, on nous dit que $S(n) > 4n$, c'est-à-dire que $\frac{S(n)}{n} > 4$. Notre but est de trouver la valeur minimale possible de $P(n)$, qui est égale à k, le nombre de diviseurs premiers de n.

On va montrer que si $k = 3$, alors $\frac{S(n)}{n}$ doit être inférieur à 4. Observons que chaque fraction $\frac{p_i-0}{p_i-1}$ est *maximisée* lorsque l'on rend le nombre premier p_i aussi *petit* que possible.

Si n n'a que 2, 3 et 5 comme diviseurs premiers, alors l'analyse ci-dessus montre que

$$\frac{S(n)}{n} < \frac{p_1-0}{p_1-1} \cdot \frac{p_2-0}{p_2-1} \cdot \frac{p_3-0}{p_3-1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{4} = 3.75 < 4.$$

Ainsi, si $k = 3$, alors $\frac{S(n)}{n} < 3.75$, ce qui implique qu'on ne peut pas avoir $S(n) > 4n$. Un argument similaire montre que $S(n) < 4n$ si $k = 2$ ou $k = 1$.

On va maintenant montrer que si $n = 2^{100} \times 3^{100} \times 5^{100} \times 7^{100}$, alors $S(n) > 4n$. Cela prouvera que $k = 4$ est la réponse souhaitée.

Lorsque a_i est grand, la fraction $\frac{p_1 - \frac{1}{p_1^{a_1}}}{p_1 - 1}$ est essentiellement égale à $\frac{p_1 - 0}{p_1 - 1}$.

Ainsi, pour cette valeur de n, on a

$$\frac{S(n)}{n} \sim \frac{p_1 - 0}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2 - 0}{p_2 - 1} \cdot \frac{p_3 - 0}{p_3 - 1} \cdot \frac{p_4 - 0}{p_4 - 1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{105}{24} = 4.375 > 4.$$

On a trouvé un entier positif n avec $k = 4$ diviseurs premiers pour lequel $S(n) > 4n$, et prouvé que si n a au plus trois diviseurs premiers, alors on doit avoir $S(n) < 4n$. Ainsi, $k = 4$ est la valeur minimale possible de $P(n)$.

Remarque intéressante : si $n = 2^5 \times 3^3 \times 5^1 \times 7^1$, on peut montrer que $S(n) = 4n$. Et donc tout multiple de ce nombre, disons $n = 2^6 \times 3^3 \times 5^1 \times 7^1$, est assuré de satisfaire $S(n) > 4n$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(D)}}$

15. Considérons $\triangle ABC$. Soit O le centre du cercle circonscrit à ce triangle et soit I le centre du cercle inscrit dans ce triangle.

    Soient R le rayon du cercle circonscrit et r le rayon du cercle inscrit.

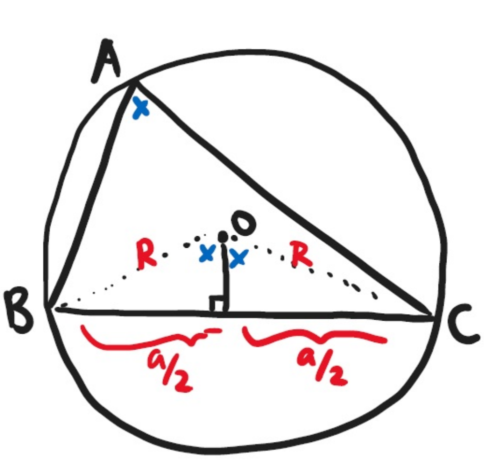
    Si $\sin A = \frac{3}{5}$ et $\angle AIO = 90°$, quelle est la valeur du rapport $\frac{R}{r}$?

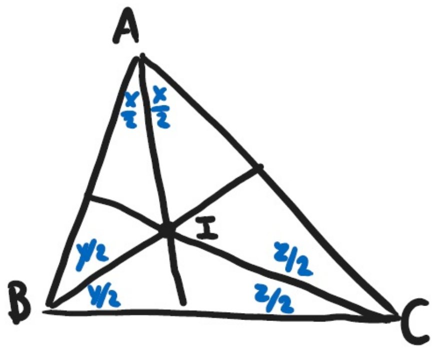
    (A) $\frac{5}{3}$ **(C)** $\frac{5}{2}$ **(E)** 4
    (B) 2 **(D)** 3 **(F)** 5

Solution : Soient $\angle A = x$, $\angle B = y$ et $\angle C = z$. Ainsi, $x + y + z = 180°$. On va montre que $\frac{R}{r} = \frac{1}{1-\cos x}$.

Soit a, b et c les longueurs des côtés BC, AC et AB, respectivement.

On utilise la trigonométrie pour déterminer les formules de AI et AO, ce qui nous permettra de déterminer une expression pour la fraction $\frac{R}{r}$.





Traçons le cercle circonscrit à $\triangle ABC$, où le cercle a un rayon R. Notons que $\angle BOC = 2\angle BAC = 2x$, par le théorème de l'angle central. En divisant $\triangle BOC$ en deux triangles rectangles, on observe que $\sin x = \frac{a/2}{R} = \frac{a}{2R}$, ce qui implique que $R = \frac{a}{2\sin x}$.

Le même argument montre que $R = \frac{b}{2\sin y} = \frac{c}{2\sin z}$. Plus précisément, on a montré que $c = 2R\sin z$.

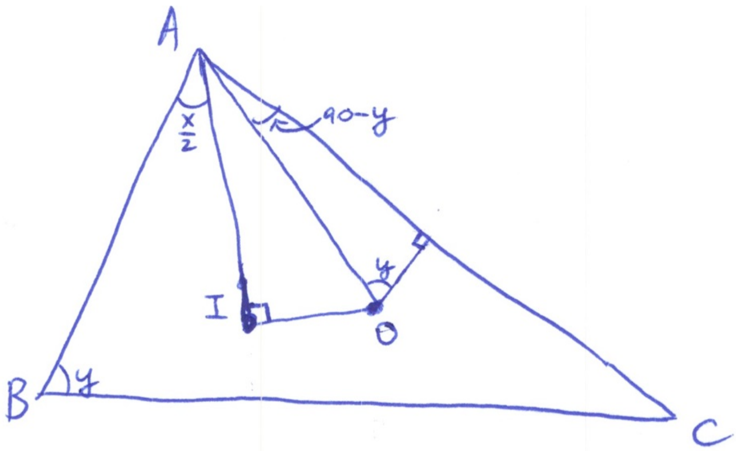
Traçons les bissectrices des angles internes du triangle, qui se rejoignent au centre I du cercle inscrit, par définition. On voit que $\angle BAI = \frac{x}{2}$ et $\angle ABI = \frac{y}{2}$, ce qui implique que $\angle AIB = 180^\circ - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 180^\circ - \frac{x+y}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - z}{2} = 90^\circ + \frac{z}{2}$.

En appliquant la loi des sinus à $\triangle ABI$, on voit que $\frac{AI}{\sin\frac{y}{2}} = \frac{AB}{\sin(90^\circ + \frac{z}{2})} = \frac{AB}{\cos\frac{z}{2}}$, ce qui implique que $AI = \frac{c\sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{z}{2}}$.

En utilisant la formule du double angle $\sin z = 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}$, on voit que

$$\begin{aligned}
\frac{AI}{AO} &= \frac{1}{AO}\cdot AI \\
&= \frac{1}{AO}\cdot\frac{c\sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{z}{2}} \\
&= \frac{(2R\sin z)\sin\frac{y}{2}}{AO\cos\frac{z}{2}} \\
&= \frac{2R\cdot(2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2})\sin\frac{y}{2}}{R\cos\frac{z}{2}} \\
&= 4\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}.
\end{aligned}$$

On va maintenant déterminer la mesure de $\angle IAO$ en fonction de y et z. Sans perte de généralité, supposons que $y \geq z$.



Par le théorème de l'angle central, $\angle AOC = 2\angle ABC = 2y$. En divisant $\triangle AOC$ en deux triangles rectangles, on observe que $\angle OAC = 90^\circ - y$.

Par conséquent, $\angle IAO = \angle BAC - \angle BAI - \angle OAC = x - \frac{x}{2} - (90^\circ - y) = \frac{x}{2} - 90^\circ + y = \frac{180^\circ - y - z}{2} - 90^\circ + y = 90^\circ - \frac{y}{2} - \frac{z}{2} - 90^\circ + y = \frac{y-z}{2}$.

Puisqu'on sait que $\angle AIO = 90^\circ$, on a $\cos(\frac{y-z}{2}) = \frac{AI}{AO}$. On a montré précédemment que $\frac{AI}{AO} = 4\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}$. Par conséquent,

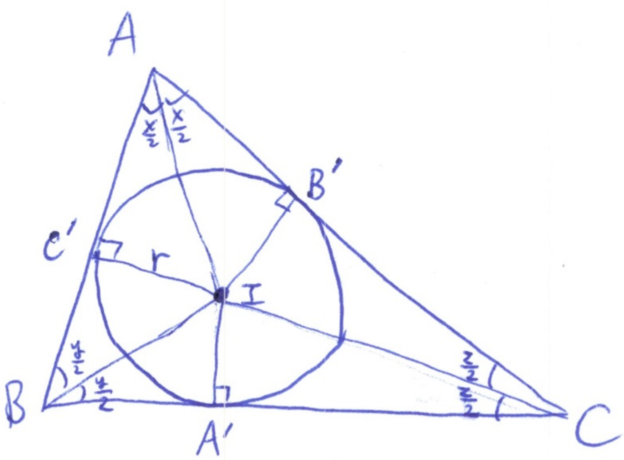
$$\begin{aligned}
\frac{AI}{AO} &= 4\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}\\
&= \cos\left(\frac{y-z}{2}\right)\\
&= \cos\left(\frac{y}{2}-\frac{z}{2}\right)\\
&= \cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}+\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}.
\end{aligned}$$

Cela implique que $3\sin\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{z}{2} = \cos\dfrac{y}{2}\cos\dfrac{z}{2}$, ce qui implique à son tour que

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} &= 3\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} - \sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}\\
&= \cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2} - \sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}\\
&= \cos\left(\frac{y}{2}+\frac{z}{2}\right) = \cos\left(\frac{y+z}{2}\right)\\
&= \cos\left(\frac{180^\circ - x}{2}\right) = \cos\left(90^\circ - \frac{x}{2}\right)\\
&= \sin\frac{x}{2}.
\end{aligned}$$

On détermine maintenant notre formule pour $\frac{R}{r}$ afin de répondre à notre question.

Il nous faut juste un dernier diagramme.



D'après la figure ci-dessus, on a $\frac{r}{AI} = \sin\frac{x}{2}$, ce qui implique que $r = AI\sin\frac{x}{2}$. Par conséquent,

$$\frac{r}{R} = \frac{AI\sin\frac{x}{2}}{AO} = \sin\frac{x}{2}\cdot\frac{AI}{AO} = \sin\frac{x}{2}\cdot\left(4\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}\right) = 4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}.$$

On a montré précédemment que la condition $\angle AIO = 90^\circ$ implique $2\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} = \sin\frac{x}{2}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{r}{R} &= 4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}\\ &= 2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(2\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}\right)\\ &= 2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\\ &= 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\\ &= 1-\cos(x).\end{aligned}$$

La formule finale est vraie en raison de la formule du double angle $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ avec $t = \frac{x}{2}$.

On a maintenant montré que $\frac{r}{R} = 1 - \cos(x)$. Dans la question, on nous donne $\sin A = \sin x = \frac{3}{5}$.

Comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on a $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

Par conséquent, $\frac{r}{R} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$, ce qui implique que $\frac{R}{r} = 5$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(F)}}$