2024 Repêchage de qualification de l'OMC

Problèmes

1. **[10 points]** Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation
$$f(x + f(xy)) = f(x)(1 + y)$$
pour tous les nombres réels x, y.

2. **[10 points]** On dit qu'un nombre naturel N est *bon* si son expansion en base 3 n'a pas de chiffres consécutifs identiques. Par exemple, 289 est bon car sa représentation en base 3 est 101201_3. Trouvez le 2024^e plus petit bon nombre naturel (0 *n'est pas* considéré comme un nombre naturel). Votre réponse doit être en base 10.

3. **[10 points]** Soit $\triangle ABC$ un triangle aigu avec $AB < AC$. Soit H son orthocentre et M le point milieu de l'arc $\widehat{BAC}$ sur le cercle circonscrit. Il est donné que B, H, M sont colinéaires, que la longueur de la hauteur de M à AB est 1, et que la longueur de la hauteur de M à BC est 6. Déterminez toutes les valeurs possibles que l'aire du $\triangle ABC$ peut prendre.

4. **[10 points]** Une suite $\{a_i\}$ est telle que $a_1 = \frac{1}{3}$ et pour tous les nombres entiers strictement positifs n
$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}.$$
Montrez que
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3^{2^{n-1}}} < a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{1}{2} - \frac{1}{3^{2^n}},$$
pour tous les nombres entiers strictement positifs n.

5. **[10 points]** Soit S l'ensemble des 25 points (x, y) avec $0 \leq x, y \leq 4$ et x et y sont nombres entiers. On choisit au hasard un triangle dont les trois sommets sont dans S. Quelle est l'espérance mathématique du carré de son aire ?

6. **[10 points]** Pour certaines constantes réelles p, q, r, on dispose d'un système d'équations
$$\begin{cases} a^2 + b + c = p \\ a + b^2 + c = q \\ a + b + c^2 = r \end{cases}$$
Quel est le nombre maximum de solutions de triplets réels (a, b, c) pour toutes les valeurs possibles de p, q, r ? Donnez un exemple de p, q, r qui atteint ce maximum.

7. **[20 points]**
   (a) Dans le $\triangle ABC$, I est le centre du cercle inscrit. Soit H l'orthocentre du $\triangle BIC$. Montrez que AH est parallèle à BC si et seulement si H est situé sur le cercle de diamètre AI.
   (b) Dans le $\triangle ABC$, soit I le centre du cercle inscrit, O le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre. Il est donné que $IO = IH$. Montrez que l'un des angles du $\triangle ABC$ doit être égal à 60 degrés.

8. **[20 points]**

   Une suite formée des X et des O est donnée, telle qu'il n'y a pas trois caractères identiques consécutifs dans la suite. Soit N le nombre de caractères dans cette suite. Maia peut échanger deux caractères consécutifs dans la suite. Après chaque échange, chaque bloc consécutif de trois caractères ou plus du même caractère sera effacé (s'il y a plusieurs blocs consécutifs de trois caractères ou plus après un échange, ils seront effacés en même temps), jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de blocs consécutifs de trois ou plus du même caractère. Par exemple, si la suite originale était $XXOOXOXO$ et que Maia échange le cinquième et le sixième caractère, le résultat final sera $XXOOOXXO \to XXXXO \to O$. Trouvez la valeur maximale N pour laquelle Maia ne peut pas nécessairement effacer tous les caractères après une série d'échanges. Un crédit partiel sera accordé pour les preuves correctes de bornes supérieures et inférieures de la valeur de N.