Qualification de l'Olympiade mathématique du Canada Repêchage 2024

Un concours de la Société mathématique du Canada.

Solutions officielles

February 20, 2024

1 [10 points] Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation

$$f(x + f(xy)) = f(x)(1 + y)$$

pour tous les nombres réels x, y.

Solution: Soit $g(x, y)$ l'affirmation $f(x + f(xy)) = f(x)(1 + y)$. On voit que si $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a que le côté gauche $= 0$ et que le côté droit $= 0$. C'est donc une solution valide.

Alors $g(0, y)$ donne $f(f(0)) = f(0)(1 + y)$. Notons que $f(f(0))$ et $f(0)$ sont tous deux des constantes, alors que $1 + y$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle. Ceci implique que $f(0)$ doit être 0.

Supposons que $f(1) = 0$. Alors $g(x, \frac{1}{x})$ implique que $f(x) = f(x)(1 + \frac{1}{x})$ ce qui implique aussi que $f(x) = 0$ pour tout x.

Supposons maintenant que $f(1) \neq 0$. Supposons qu'il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = b \neq 0$. Alors $g(a, y)$ donne

$$f(a + f(ay)) = b(1 + y).$$

Comme b est non nul, le côté droit peut prendre n'importe quelle valeur réelle. Par conséquent, f est surjective.

Supposons maintenant que $f(c) = f(d)$ pour certains nombres réels $c \neq d$. Alors $g(1, c)$ et $g(1, d)$ nous donnent

$$f(1)(1 + c) = f(1 + f(c)) = f(1 + f(d)) = f(1)(1 + d)$$

ce qui implique que$c = d$ (comme $f(1) \neq 0$). Par conséquent, f est injective. L'ensemble de ces observations montre que f est bijective.

On a que $f(x, -1)$ donne

$$f(x + f(-x)) = 0.$$

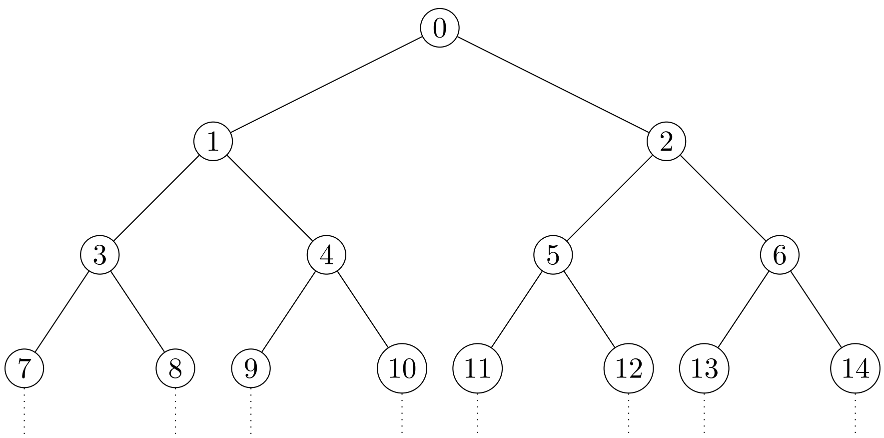
Par bijectivité, comme $f(0) = 0$, cela implique que $x + f(-x) = 0$, ce qui donne $f(x) = x$. En replaçant ce résultat dans le côté gauche et le côté droit, on obtient $x + xy$. C'est donc une solution valide.

Par conséquent, $f(x) = x$ et $f(x) = 0$ sont les seules solutions.

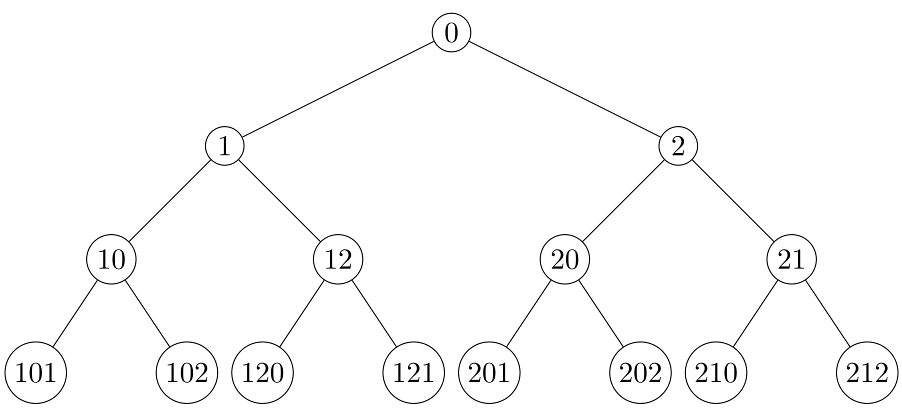
2 [10 points] On dit qu'un nombre naturel N est *bon* si son expansion en base 3 n'a pas de chiffres consécutifs identiques. Par exemple, 289 est bon car sa représentation en base 3 est 101201_3. Trouvez le 2024^e plus petit bon nombre naturel (0 *n'est pas* considéré comme un nombre naturel). Votre réponse doit être en base 10.

Solution: La réponse est 51575.

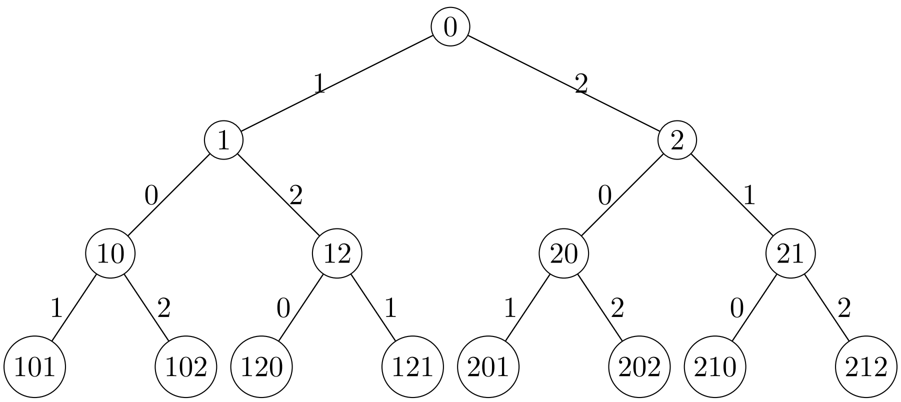
Considérons l'arbre ci-dessous ; appelons-le T. Dans cet arbre, chaque noeud a deux enfants, et les nombres utilisés pour numéroter les noeuds sont vont croissant d'une rangée à l'autre. De plus, dans chaque rangée, les nombres augmentent de gauche à droite.



Remplaçons maintenant un cercle contenant i par le i-ème bon nombre écrit en base 3.



Notons que, dans ce diagramme, chaque parent est un préfixe de son enfant ; chaque enfant a 1 chiffre de plus que son parent.



Considérons le processus suivant pour construire l'arbre. Procédons rangée par rangée, pour chaque nœud :

1. Si le nœud se termine par 0, ajoutons 1 afin de constituer l'enfant de gauche, et ajoutons 2 afin de constituer l'enfant de droite.
2. Si le nœud se termine par 1, ajoutons 0 afin de constituer l'enfant de gauche, et ajoutons 2 afin de constituer l'enfant de droite.
3. Si le nœud se termine par 2, ajoutons 0 afin de constituer l'enfant de gauche, et ajoutons 1 afin de constituer l'enfant de droite.

Affirmation : ce processus produira tous les bons nombres valides. De plus, ceux-ci sont classés par nombre de rangée, puis de gauche à droite.

Preuve de l'affirmation : Procédons par induction sur le nombre de rangée (en indexant à partir de 0).

Cas de base : n=1 (puisque la cellule contenant 0 n'est pas un bon nombre). On a 1 et 2 dans cette rangée. Ce sont les plus petits bons nombres, et $1 < 2$

Hypothèse d'induction : Supposons que l'affirmation est vraie pour les rangées $1, 2, 3, \ldots i$ pour certains i.

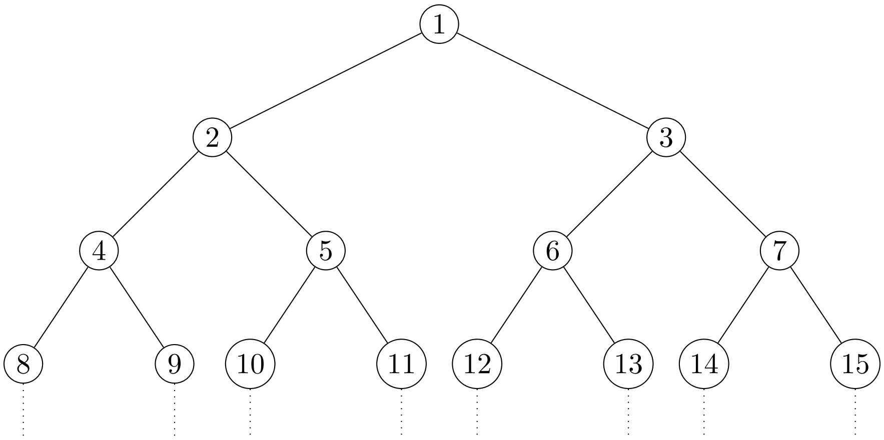
Étape d'induction : Effectuons l'opération sur la i-ème rangée pour obtenir la $i + 1$ rangée. Notons que, par construction, tous les nombres ont $i + 1$ chiffres dans la rangée $i + 1$. Considérons deux nombres, disons A et B, de cette rangée, où A est à gauche de B. Enlevons le chiffre le plus à droite de A et B pour obtenir respectivement A' et B'. Soit a b les chiffres enlevés, respectivement.

Cas 1 : A et B n'ont pas le même parent. Puisque A est à gauche de B, le parent de A doit être à gauche du parent de B, et donc $A' < B'$ par l'hypothèse d'indcution. Cela implique que $A < B$.

Cas 2 : A et B ont le même parent. Alors $A' = B'$. Par construction, puisque A est à gauche de B, cela implique $a < b$. Donc $A < B$.

On en conclut que si A est à gauche de B, alors $A < B$. L'affirmation est donc démontrée.

Maintenant, T. On souhaite trouver l'emplacement de 2024 dans T. Construisons T', où nous prenons T et ajoutons 1 à chaque noeud.



Obtenir 2024 dans T revient à obtenir 2025 dans T'.

Notons que chaque enfant de droite dans T' est impair et que chaque enfant de gauche dans T' est pair.

On peut donc diviser à plusieurs reprises 2025 par 2 et prendre la fonction plancher. Si on obtient un nombre impair, on est allé à droite ; si on obtient un nombre pair, on est allés à gauche. Ensuite, on peut retracer le nombre en utilisant l'arbre de base 3.

Voici le calcul :

1. $\lfloor \frac{2025}{2} \rfloor = 1012 \longrightarrow$ comme 2025 est impair, on est allé à droite du cercle 1012 pour obtenir 2025.
2. $\lfloor \frac{1012}{2} \rfloor = 506 \longrightarrow$ comme 1012 est pair, on est allé à gauche du cercle 506 pour obtenir 2025.
3. $\lfloor \frac{506}{2} \rfloor = 253 \longrightarrow$ comme 506 est pari, on est allé à gauche du cercle 253 pour obtenir 506.
4. $\lfloor \frac{253}{2} \rfloor = 126 \longrightarrow$ comme 253 est impair, on est allé à droite du cercle 126 pour obtenir 253.
5. $\lfloor \frac{126}{2} \rfloor = 63 \longrightarrow$ comme 126 est pair, on est allé à gauche du cercle 63 pour obtenir 2025.
6. $\lfloor \frac{63}{2} \rfloor = 31 \longrightarrow$ comme 63 est impair, on est allé à droite du cercle 31 pour obtenir 2025.
7. $\lfloor \frac{31}{2} \rfloor = 15 \longrightarrow$ comme 31 est impair, on est allé à droite du cercle 15 pour obtenir 2025.
8. $\lfloor \frac{15}{2} \rfloor = 7 \longrightarrow$ comme 15 est impair, on est allé à droite du cercle 7 pour obtenir 2025.
9. $\lfloor \frac{7}{2} \rfloor = 3 \longrightarrow$ comme 7 est impair, on est allé à droite du cercle 3 pour obtenir 2025.
10. $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1 \longrightarrow$ comme 3 est impair, on est allé à droite du cercle 1 pour obtenir 2025.

En partant de la droite, on est allé à droite $\longrightarrow$ droite $\longrightarrow$ droite $\longrightarrow$ droite $\longrightarrow$ droite $\longrightarrow$ gauche $\longrightarrow$ droite $\longrightarrow$ gauche $\longrightarrow$ gauche $\longrightarrow$ droite.

Selon les règles de construction de l'arbre en base 3, ce sera le nombre $2121202012_3 = 51575$.

3 [10 points] Soit $\triangle ABC$ un triangle aigu avec $AB < AC$. Soit H son orthocentre et M le point milieu de l'arc $\widehat{BAC}$ sur le cercle circonscrit. Il est donné que B, H, M sont colinéaires, que la longueur de la hauteur de M à AB est 1, et que la longueur de la hauteur de M à BC est 6. Déterminez toutes les valeurs possibles que l'aire du $\triangle ABC$ peut prendre.

Solution: Soit E le pied de la perpendiculaire allant de B à AC. H, M et B colinéaires impliquent que E se trouve aussi sur cette droite. Soit N le milieu de BC, alors $\angle MEC = \angle MNC = 90°$, ce qui implique que M, E, N et C sont concycliques.

On a ensuite que $\angle C = \angle ECN = \angle EMN = \frac{1}{2}\angle A$. Soit F le pied de la perpendiculaire de M à AB, alors on a que M, F, A et E sont concycliques. De plus, on voit que $\angle MAE = \angle MAC = 90° - \frac{1}{2}\angle A$, ce qui signifie que $\triangle AEM \cong \triangle AFM$. Par conséquent, $MF = ME = 1$.

Nous sommes maintenant prêts à conclure : si la longueur de BC est $2x$, par puissance d'un point nous savons que $BN \cdot BC = BE \cdot BM$, ce qui implique que

$$\begin{aligned}
x \cdot 2x &= (\sqrt{x^2+6^2} - 1)(\sqrt{x^2+6^2}) \\
2x^2 &= x^2 + 36 - \sqrt{x^2+36} \\
x^2 - 36 &= -\sqrt{x^2+36} \\
(x^2-36)^2 &= x^2 + 36 \\
x^4 - 73x^2 + 36 \cdot 35 &= 0 \\
(x^2-28)(x^2-45) &= 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, $x = 2\sqrt{7}$ ou $x = 3\sqrt{5}$. Cependant, lorsque $x = 3\sqrt{5}$, nous n'avons pas $BN \cdot BC = BE \cdot BM$. Nous ne pouvons donc pas avoir $x = 2\sqrt{7}$.

Enfin, on voit que $EC = \sqrt{28 + 36 - 1} = 3\sqrt{7}$. Toujours par puissance d'un point, on a $AE \cdot EC = ME \cdot EB$. Donc $AE = \frac{1}{3}\sqrt{7}$ et $AC = \frac{10}{3}\sqrt{7}$.

Il s'ensuit que $[\triangle ABC] = \frac{1}{2}AC \cdot BE = \frac{35\sqrt{7}}{3}$.

4 [**10 points**] Une suite $\{a_i\}$ est telle que $a_1 = \frac{1}{3}$ et pour tous les nombres entiers strictement positifs n
$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}.$$
Montrez que
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3^{2^{n-1}}} < a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{1}{2} - \frac{1}{3^{2^n}},$$
pour tous les nombres entiers strictement positifs n.

Solution: On commence par affirmer que $s_n = \frac{1}{2} - \frac{a_{n+1}}{1-a_{n+1}}$. En effet, on peut procéder par induction pour démontrer la véracité de cette affirmation, le cas de base $n = 1$ étant évident.

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{a_{n+1}}{1-a_{n+1}} + a_{n+1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{a_{n+1}^2}{1-a_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2 - a_{n+1} + 1} \cdot \frac{a_{n+1}^2 - a_{n+1} + 1}{1 - a_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{a_{n+2}}{1-a_{n+2}} \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de montrer que
$$1 + 3^{2^{n-1}} < \frac{1}{a_{n+1}} < 1 + 3^{2^n}$$
Une fois de plus, l'induction se termine ici.

5 [**10 points**] Soit S l'ensemble des 25 points (x, y) avec $0 \leq x, y \leq 4$ et x et y sont nombres entiers. On choisit au hasard un triangle dont les trois sommets sont dans S. Quelle est l'espérance mathématique du carré de son aire ?

Solution: On commence par compter le nombre de triangles avec des sommets dans S que nous pouvons choisir. Il y a $\binom{25}{3} = 2300$ façons possibles de choisir trois points distincts dans S. Ceux-ci forment un triangle si et seulement si les trois points ne sont pas colinéaires. Or, il est plus facile de compter les ensembles de trois points qui sont colinéaires, car il y a 12 droites avec 5 points inscrits sur elles, 4 droites avec 4 points inscrits sur elles, et 16 droites avec 3 points inscrits sur elles. Cela donne $12 \cdot \binom{5}{3} + 4 \cdot \binom{4}{3} + 16 = 152$ façons de choisir trois points colinéaires dans S, ce qui laisse 2148 façons de choisir un triangle dont les trois sommets sont dans S.

Ensuite, pour additionner les aires des triangles possibles, il sera commode de choisir trois points $A = (a_1 + 2, a_2 + 2), B = (b_1 + 2, b_2 + 2)$ et $C = (c_1 + 2, c_2 + 2)$ indépendamment parmi les sommets de S. On ajoute deux aux coordonnées de chacun de A, B et C afin que nos variables soient comprises entre -2

et 2, et aient donc une moyenne nulle. De cette façon, on compte chaque triangle six fois, et on inclus également les triangles dégénérés qui ne contribuent pas à l'aire. D'après la formule des lacets, le triangle ABC a une aire de

$$\frac{1}{2}\left(a_1b_2 + b_1c_2 + c_1a_2 - a_2b_1 - b_2c_1 - c_2a_1\right).$$

Son carré est constitué de nombreux monômes de degré 4 dans les variables de variables a_i, b_i, c_i; lorsqu'une variable apparaît exactement une fois dans la factorisation d'un monôme, la somme de ce dernier est nulle : par exemple, le monôme $-2a_1^2b_2c_2$ apparaissant dans le carré de l'aire résultant de la multiplication du premier et du dernier terme est nul, puisqu'on a

$$\sum_{a_1=-2}^{2}\sum_{a_2=-2}^{2}\sum_{b_1=-2}^{2}\sum_{b_2=-2}^{2}\sum_{c_1=-2}^{2}\sum_{c_2=-2}^{2} -2a_1^2b_2c_2$$

$$-250\sum_{a_1=-2}^{2} a_1^2 \sum_{b_2=-2}^{2} b_2 \sum_{c_2=-2}^{2} c_2 = -250\cdot 10\cdot 0\cdot 0 = 0.$$

Ainsi, on a

$$\frac{1}{4}\sum_{a_1=-2}^{2}\sum_{a_2=-2}^{2}\sum_{b_1=-2}^{2}\sum_{b_2=-2}^{2}\sum_{c_1=-2}^{2}\sum_{c_2=-2}^{2}\left(a_1b_2 + b_1c_2 + c_1a_2 - a_2b_1 - b_2c_1 - c_2a_1\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{a_1=-2}^{2}\sum_{a_2=-2}^{2}\sum_{b_1=-2}^{2}\sum_{b_2=-2}^{2}\sum_{c_1=-2}^{2}\sum_{c_2=-2}^{2}\left(a_1^2b_2^2 + b_1^2c_2^2 + c_1^2a_2^2 + a_2^2b_1^2 + b_2^2c_1^2 + c_2^2a_1^2\right).$$

Chacun de ces termes vaut $\frac{1}{4}\cdot 5^4\cdot 10^2 = 5^6$, donc la somme est $6\cdot 5^6$, et donc la somme des aires des triangles dans S est égale à 5^6. La réponse est donc $\frac{5^6}{2148} = \frac{15625}{2148} \approx 7.274$.

6 [10 points] Pour certaines constantes réelles p, q, r, on dispose d'un système d'équations

$$\begin{cases} a^2 + b + c = p \\ a + b^2 + c = q \\ a + b + c^2 = r \end{cases}$$

Quel est le nombre maximum de solutions de triplets réels (a, b, c) pour toutes les valeurs possibles de p, q, r ? Donnez un exemple de p, q, r qui atteint ce maximum.

Solution: La réponse est $2^3 = 8$. On effectue d'abord quelques simplifications avant de prouver cette borne ou de donner une construction explicite. Soit $a + b + c = s$. on obtient alors $a^2 - a = p - s$, donc

$$a = \frac{1}{2} \pm \sqrt{p - s + 1/4},$$

et on obtient des expressions similaires pour b et c; en substituant dans l'équation $a + b + c = s$, on obtient

$$s - \frac{3}{2} \pm \sqrt{p - s + 1/4} \pm \sqrt{q - s + 1/4} \pm \sqrt{r - s + 1/4} = 0. \tag{1}$$

On multiplie maintenant les huit possibilités ensemble pour obtenir un polynôme dans s de degré 8. Il convient maintenant de considérer un fait général sur la multiplication par des conjugués :

Lemme : L'expression

$$\prod_{i,j,k\in\{-1,1\}}(a+ib+jc+kd)$$

est un polynôme dans chacune des variables a^2, b^2, c^2 et d^2. Il est de degré 8.

Preuve : On remarque que

$$\prod_{i,j,k\in\{-1,1\}}(a+ib+jc+kd)=\prod_{i,j\in\{-1,1\}}(a+ib+jc+d)(a+ib+jc-d)=\prod_{i,j\in\{-1,1\}}((a+ib+jc)^2-d^2),$$

qui est bien un polynôme en d^2. Des manipulations similaires montrent que c'est aussi un polynôme en b^2 et c^2. Comme pour a^2, on utilise une manipulation légèrement différente comme suit :

$$\prod_{i,j,k\in\{-1,1\}}(a+ib+jc+kd)=\prod_{\frac{j}{i},\frac{k}{i}\in\{-1,1\}}(a^2-(b+jc/i+kd/i)^2).$$

Ceci conclut la démonstration du lemme. □

D'après ce lemme, on voit que le produit des huit possibilités de l'équation (1) est un polynôme en s de degré 8. Il y a donc au plus 8 solutions pour s. Pour une solution donnée s, disons qu'il y a k choix de signes $\pm$ qui rendent l'équation (1) vraie. Alors, le produit

$$\prod_{i,j,k\in\{-1,1\}}\left(s-\frac{3}{2}+i\sqrt{p-s+1/4}+j\sqrt{q-s+1/4}+k\sqrt{r-s+1/4}\right)$$

devrait avoir une racine à cette valeur de s avec une multiplicité k. Ainsi, il y a au plus 8 solutions pour (s, i, j, k), qui déterminent (a, b, c) de façon unique.

Soit maintenant $(p, q, r) = (100, 101, 102)$. On voit que pour chaque choix de i, j, k, on a que la fonction

$$F(s)=s-\frac{3}{2}+i\sqrt{p-s+1/4}+j\sqrt{q-s+1/4}+k\sqrt{r-s+1/4}$$

satisfait $F(100) > 0$ et $F(-100) < 0$. Il doit donc y avoir au moins une solution pour s, et ainsi (a, b, c).

7 [20 points]

1. Dans le $\triangle ABC$, I est le centre du cercle inscrit. Soit H l'orthocentre du $\triangle BIC$. Montrez que AH est parallèle à BC si et seulement si H est situé sur le cercle de diamètre AI.

2. Dans le $\triangle ABC$, soit I le centre du cercle inscrit, O le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre. Il est donné que $IO = IH$. Montrez que l'un des angles du $\triangle ABC$ doit être égal à 60 degrés.

Solution:

1. On note que IH est perpendiculaire à BC, donc AH est parallèle à BC si et seulement si AH est perpendiculaire à IH. Cela revient à dire que H est situé sur le cercle de diamètre AI.

2. Notons que $IO = IH$ et $AI = AI$. De plus, les angles HAI et IAO sont égaux ou complémentaires, et la même propriété est vraie si l'on remplace A par n'importe quel autre sommet du triangle. Les angles HAI et IAO sont complémentaires si et seulement si l'angle A est obtus. Il s'agit d'une configuration générale dont on va extraire les propriétés dans un lemme :

   Lemme : Étant donné les triangles XYZ et $X'Y'Z'$ tels que $XY = X'Y'$ et $YZ = Y'Z'$, et tels que les angles YZX et $Y'Z'X'$ sont soit égaux soit complémentaires, alors les angles YXZ et $Y'X'Z'$ sont soit égaux soit complémentaires.

   Démonstration : On peut en faire la démonstration à l'aide de la loi des sinus. Notons que

   $$\frac{\sin \angle YXZ}{\sin \angle YZX} = \frac{YZ}{YX} = \frac{Y'Z'}{Y'X'} = \frac{\sin \angle Y'X'Z'}{\sin \angle Y'Z'X'}.$$

   Les dénominateurs sont égaux selon notre hypothèse d'angle, donc $\sin \angle YXZ = \sin \angle Y'X'Z'$, et on conclut que ces angles sont soit égaux, soit complémentaires. □

   D'après le lemme, les angles AHI et AOI sont soit égaux, soit supplémentaires, et il en va de même pour les paires BHI et BOI, ainsi que CHI et COI. Supposons sans perte de généralité que les angles B et C sont aigus.

   On traite d'abord le cas où l'angle A est obtus. Ensuite, les angles IAH et IAO sont complémentaires, donc les angles AHI et AOI doivent être égaux. Cela montre que les points H, A, I, et O sont situés sur un cercle. Considérons maintenant les angles BHI et BOI. S'ils sont égaux, alors H et O sont des réflexions l'un de l'autre sur la droite BI, et s'ils sont complémentaires, alors B se trouve aussi sur le cercle contenant H, A, I et O. Il en est de même pour C. On peut donc supposer sans perte de généralité que H et O sont des réflexions l'un sur l'autre autour de BI et que H, A, I, O et C sont tous situés sur un cercle. Mais alors $\angle AIC = \angle AOC$, et nous obtenons $90^\circ + \frac{1}{2}\angle B = 2\angle B$, d'où $\angle B = 60^\circ$, comme souhaité.

   On traite maintenant le cas où le triangle est aigu. Supposons qu'au moins deux paires parmi $(\angle AHI, \angle AOI), (\angle BHI, \angle BOI)$ et $(\angle CHI, \angle COI)$ sont égales; supposons qu'il s'agit des deux premières. Alors les triangles AHI et AOI sont congruents, donc $AH = AO$, et de même $BH = BO$. Cela implique que les triangles ABH et ABO sont congruents. Si H et O sont identiques, alors le triangle ABC est équilatéral, et le résultat désiré s'ensuit. Sinon, H et O sont des réflexions l'un de l'autre sur la droite AB, ce qui n'est pas possible puisque nous avons supposé que le triangle ABC est aigu.

Supposons maintenant qu'au moins deux paires parmi $(\angle AHI, \angle AOI), (\angle BHI, \angle BOI)$ et $(\angle CHI, \angle COI)$ sont complémentaires; supposons une fois, de plus qu'il s'agit des deux premières. Alors les points A, H, O, I et B sont tous situés sur un cercle, et par le même raisonnement que ci-dessus, l'égalité des angles $\angle AIB = \angle AOB$ implique que $\angle C = 60°$.

8 [20 points] Une suite formée des X et des O est donnée, telle qu'il n'y a pas trois caractères identiques consécutifs dans la suite. Soit N le nombre de caractères dans cette suite. Maia peut échanger deux caractères consécutifs dans la suite. Après chaque échange, chaque bloc consécutif de trois caractères ou plus du même caractère sera effacé (s'il y a plusieurs blocs consécutifs de trois caractères ou plus après un échange, ils seront effacés en même temps), jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de blocs consécutifs de trois ou plus du même caractère. Par exemple, si la suite originale était $XXOOXOXO$ et que Maia échange le cinquième et le sixième caractère, le résultat final sera $XXOOOXXO \to XXXXO \to O$. Trouvez la valeur maximale N pour laquelle Maia ne peut pas nécessairement effacer tous les caractères après une série d'échanges. Un crédit partiel sera accordé pour les preuves correctes de bornes supérieures et inférieures de la valeur de N.

Solution: Supposons que dans la configuration initiale il y ait a X et b O. Supposons, sans perte de généralité, que $a \geq b$. Comme il n'y a pas trois X ou trois O à la suite, nous avons aussi $2b + 2 \geq a$; entre chaque paire de O et à gauche du O le plus à gauche et à droite du O le plus à droite, il y a au plus deux Xs. On commence par le lemme suivant :

Lemme 1: On peut effectuer un nombre fini de déplacements à partir de la configuration initiale, de telle sorte qu'aucun X ou O ne soit effacé, et que la configuration résultante soit

$$\underbrace{XOXO\ldots XO}_{2b-a+2}\underbrace{XXOXXO\ldots XXO}_{a-2-b}XX$$

pour $a \geq b+2$, et

$$\underbrace{XOXO\ldots XO}_{b}X$$

pour $a = b+1$, et

$$\underbrace{XOXO\ldots XO}_{a}$$

pour $a = b$.

Démonstration : On représente chaque configuration de X et de O par une suite de $b+1$ nombres, représentant le nombre de X entre les paires consécutives de O, et incluant le nombre de X avant le premier O et après le dernier O. Par exemple, on représente la configuration $XOOXXOXOXXOXO$ par la suite $(1, 0, 2, 1, 2, 1, 0)$. Notons que la somme des termes de cette suite doit être a, qu'aucun terme de la suite n'est supérieur ou égal à 3, et qu'il n'existe pas deux 0 consécutifs dans cette suite. Notons également que l'action d'échanger un X et un O qui n'entraîne pas d'annulation est équivalente à la sélection d'une paire de termes consécutifs de cette séquence, à l'ajout de 1 à l'un des termes et à la soustraction de 1 à l'autre terme, de façon à ce que les conditions continuent de s'appliquer.

On est maintenant prêt à procéder par induction. Nos cas de base seront $(a, b) = (2x + 2, x), (1, 0)$ et $(0, 0)$ (pour $x \geq 0$), et on réduira tous les autres cas $(a, b) = (m, n)$ au cas$(a, b) = (m - 1, n - 1)$. Lorsque $(a, b) = (1, 0)$ ou $(0, 0)$, il est facile de voir que le lemme est vérifié; il y a exactement une configuration (X et la chaîne vide), qui correspond à la chaîne du lemme. Lorsque $(a, b) = (2x + 2, x)$, il n'y a à nouveau qu'une seule configuration initiale possible, qui correspond à celle donnée dans le lemme : c'est

$$\underbrace{XXOXXO\ldots XXO}_{x}XX.$$

On procède maintenant avec l'étape inductive. Supposons que $(a, b) = (m, n)$, où $n \neq 0$ et $m \leq 2n + 1$. Sous ces hypothèses, la configuration souhaitée commence par $XO\ldots$, ce qui équivaut à ce que le premier terme de la suite correspondante soit égal à 1. Une fois que nous avons modifié la configuration vers une configuration où le premier terme est égal à 1, on peut maintenant appliquer l'hypothèse inductive pour arranger les n termes restants de la suite, dont la somme est $m - 1$, dans la configuration désirée.

Initialement, le premier terme de la suite peut être égal à 0, 1 ou 2. S'il est égal à 1, on peut déjà passer à l'étape inductive.

Si le premier terme de la suite est initialement égal à 0, on considère le terme le plus à gauche de la suite qui est 2, s'il existe. On lui soustrait 1 et on ajoute 1 au terme situé à sa gauche, en répétant l'opération jusqu'à ce que l'effet net soit qu'on a soustrait 1 au terme qui vaut 2 et ajouté 1 au premier terme. On peut vérifier que, dans ce processus, aucun terme de la suite n'est supérieur ou égal à 3, puisqu'on a choisi le terme le plus à gauche qui est 2. De plus, on n'a jamais créé deux 0 consécutifs, puisqu'il n'y avait pas initialement deux 0 consécutifs. On a donc généré une série d'étapes pour aboutir à une configuration où le premier terme de la suite est 1, et on peut procéder par induction.

Il est possible qu'aucun terme de la suite ne soit 2. Puisqu'il y a $b + 1$ termes dont la somme est a, la suite doit alors être $(0, 1, 1, \ldots, 1)$, et $a = b$ doit s'appliquer. Dans ce cas, on transforme simplement en $(0, 2, 0, 1, \ldots, 1)$ puis en $(1, 1, 0, 1, \ldots, 1)$.

Par contre, si le premier terme de la suite est initialement égal à 2, on cherche le terme le plus à gauche de la suite qui n'est pas égal à 2. Ce terme doit exister puisque $m = 2n + 2$ si la suite est entièrement composée de 2. On ajoute ensuite 1 à ce terme et on soustrait 1 au terme situé à sa gauche On répète l'opération jusqu'à ce que le premier terme soit égal à 1. Une fois de plus, on peut vérifier que ce processus ne crée jamais un terme de la suite supérieur ou égal à 3 ou deux termes consécutifs de la suite qui sont tous les deux égaux à 0.

Ceci complète l'étape d'induction et achève la démonstration du lemme. □

Corollaire 1 : Supposons que dans la configuration initiale il y ait a X et b O, avec $2b + 2 \geq a \geq b$. Alors, pour toute autre configuration de a X et b O qui ne comporte pas trois X ou O consécutifs, il existe une suite de coups aboutissant à cette configuration finale.

Démonstration : On utilise le lemme deux fois. On commence par transformer la configuration initiale en la configuration spécifiée dans le lemme, puis on effectue les déplacements en sens inverse pour atteindre la configuration finale. □

Nous sommes maintenant prêts à comprendre quelles sont les paires de (a, b) qui peuvent être effacées. Le corollaire suivant va nous aider.

Corollaire 2 : Une paire (a, b) est dite effaçable si chaque (de façon équivalence, par le Corollaire 1, *toute*) configuration initiale peut être effacée. Alors, si $a \geq 4$ et $(a-3, b)$ est effaçable, alors il en va de même de (a, b).

Démonstration : Transformons d'abord la configuration en celle donnée par le lemme 1. Lorsque $a \geq b+2$, on peut déplacer le dernier O vers la droite et effacer trois X, obtenant ainsi une configuration avec $N-3$ lettres. Lorsque $a = b+1$ ou $a = b$ et $a \geq 4$, on remplace itérativement le $XOXOXOX$ par

$$XOXOXOX \to OXXOXOX \to OXXOXXO \to OXXXOXO \to OOXO,$$

qui comporte à nouveau $N-3$ lettres avec trois X de moins. □

Nous sommes maintenant prêts à résoudre le problème. Nous affirmons que la réponse est $N = 17$. On commence par la configuration

$$XXOXXOXXOXXOXXOXX,$$

qui a cinq O et montrons qu'elle n'est pas effaçable. En fait, aucune configuration avec exactement cinq O n'est effaçable ; puisqu'on ne peut effacer les O que par groupes d'au moins 3, on aurait à effacer les cinq O en une seule fois. Mais cela est impossible en raison du fait général suivant :

Affirmation : Après un échange, plusieurs séries de retraits d'au moins trois X et O consécutifs ont lieu. Lors du premier tour, soit un bloc de trois X est retiré, soit un bloc de trois O est retiré, soit les deux. Si les deux se produisent, les blocs de X et de O se trouvent l'un à côté de l'autre. Lors des tours suivants, un seul bloc de 3 ou 4 X ou O sera retiré.

Démonstration : La partie de l'affirmation qui concerne le premier tour de retraits est évidente. Lors des prochains tours, le seul retrait possible est la création d'une suite de 3 ou 4 à partir des caractères retirés lors du tour précédent, qui sont toujours contigus par induction. Il ne peut pas y avoir 5 ou plus à la suite puisque les deux parties qui ont été combinées ensemble par la suppression de caractères entre les deux ont au plus deux caractères, puisqu'ils n'ont pas été supprimés au tour précédent. □

On doit maintenant vérifier que toutes les configurations pour $N \geq 18$ peuvent être entièrement effacées. Pour cela, on démontre d'abord que certaines paires (a, b) sont effaçables en se basant sur la classe de résidus de a et b mod 3. Ces constructions, combinées avec le Corollaire 2, nous permettront de montrer que chaque combinaison où $a + b = 18, 19$ et 20 est effaçable. Rappelons qu'en raison du Corollaire 1, on peut commencer avec n'importe quelle configuration initiale.

1. **Configuration 1:** $(a, b) = (3, 3)$. On a

$$XX\underline{OX}OO \to \underline{XXXOOO}.$$

2. **Configuration 2:** $(a, b) = (4, 3)$. On a

$$XXOO\underline{XO}X \to XX\underline{OOO}XX \to \underline{XXXX}.$$

3. **Configuration 3:** $(a, b) = (4, 7)$. On a

$$OOXXOO\underline{XO}XOO \to OOXX\underline{OOO}XX \to OO\underline{XXXX}OO \to \underline{OOOO}.$$

4. **Configuration 4:** $(a, b) = (8, 6)$. On a

$$XXOO\underline{XO}XOXXOXOX \to XX\underline{OOO}XXOXXOXOX \to \underline{XXXX}OXXOXOX,$$

ce qui se ramène à $(a, b) = (4, 3)$.

5. **Configuration 5:** $(a, b) = (8, 7)$. On utilise la même configuration de départ que dans la configuration 3, en ajoutant XX aux deux extrémités.

6. **Configuration 6:** $(a, b) = (8, 11)$. On utilise la même configuration de départ que dans la configuration 5, en ajoutant OO aux deux extrémités.

On peut vérifier que si $a + b \geq 18$, alors on peut réduire à l'une des 6 configurations ci-dessus (éventuellement en échangeant a et b) en utilisant de façon répétée le Corollaire 2, de sorte que la configuration est toujours effaçable. $\square$