Le Défi ouvert canadien de mathématiques 2023

Canadian Mathematical Society
Société mathématique du Canada

Livret officiel du concours

Veuillez noircir complètement le cercle qui s'applique :

Votre date de naissance est-elle le 30 juin 2004 *ou avant*? Ⓞ Ⓝ

Pourquoi nous posons cette question : parce qu'il y a un âge limite pour participer officiellement au DOCM.

Avez-vous la citoyenneté canadienne ou la résidence permanente au Canada? Ⓞ Ⓝ

Pourquoi nous posons cette question : parce que nous avons besoin de savoir dans laquelle de nos deux divisions principales vous classer – division canadienne ou division internationale.

Votre courriel : ____________________

Pourquoi nous posons cette question : parce que si vous obtenez un score suffisamment élevé au DOCM, nous pourrions vous contacter pour vous inviter à des concours de niveau supérieur comme l'Olympiade mathématique du Canada.

NE PAS PHOTOCOPIER LES PAGES DE CE LIVRET
Chaque page a son propre code-barre préenregistré qui correspond à un élève en particulier.

Page à identification unique
– aucune photocopie!

Question A1 (4 points)

Tyler a pris un nombre positif et nonnul , l'a élevé au carré, puis il a divisé la réponse par 3, puis il a élevé la réponse au cube et enfin il a divisé la réponse par 9. À la fin de ces manipulations, il a obtenu le même nombre qu'au départ.

Quel était ce nombre ?

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question A2 (4 points)

Un point de coordonnées $(a, 2a)$ se trouve dans le 3ème quadrant ainsi que sur la courbe définie par l'équation $3x^2 + y^2 = 28$.

Trouvez a.

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question A3 (4 points)

Tanya et Katya ont fait une expérience et ont obtenu deux nombres réels positifs x et y. Chacun est compris entre 4 et 100 inclusivement. Tanya a écrit ces deux nombres et ensuite a calculé leur moyenne. Katya, elle, a écrit les deux nombres puis la deuxième une deuxième fois, et elle a calculé la moyenne des trois nombres x, y et y.

Quelle est la différence maximale entre leurs résultats respectifs ?

Votre solution :

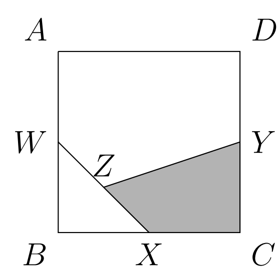
Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question A4 (4 points)

La mesure de chaque côté du carré ABCD est de 10 cm. Les points W, X, Y et Z sont les milieux des segments AB, BC, CD et WX, respectivement.

Déterminez l'aire du quadrilatère $XCYZ$ (en cm^2).



Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Page à identification unique
– aucune photocopie!

Question B1 (6 points)

Un insecte se déplace dans le plan cartésien, à partir du point $(0, 0)$. Au premier déplacement, l'insecte se déplace d'une unité vers le haut, le bas, la gauche ou la droite avec la même probabilité de sélectioner la direction. Pour les déplacements suivants, l'insecte se déplace d'une unité vers le haut, le bas, la gauche ou la droite avec la même probabilité de sélectioner la direction parmi les trois directions autres que celle de son déplacement précédent. Par exemple, si le premier déplacement a été d'une unité vers le haut, le deuxième déplacement doit être soit d'une unité vers le bas, soit d'une unité vers la gauche, soit d'une unité vers la droite.

Après quatre déplacements, quelle est la probabilité que l'insecte soit au point de coordonnées $(2, 2)$?

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Page à identification unique
– aucune photocopie!

Question B2 (6 points)

Ce mois-ci, j'ai passé 26 jours à faire de l'exercice pendant 20 minutes ou plus, 24 jours à faire de l'exercice pendant 40 minutes ou plus, et 4 jours à faire de l'exercice pendant exactement 2 heures. Je ne fais jamais d'exercice pendant moins de 20 minutes ou plus de 2 heures.

Quel est le nombre minimum d'heures d'exercice que j'aurais pu faire ce mois-ci ?

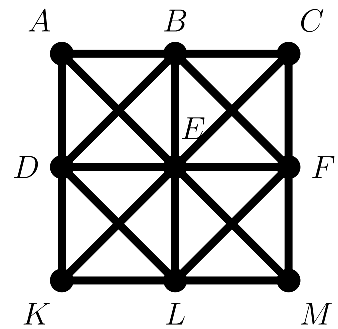
Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Page à identification unique
– aucune photocopie!

Question B3 (6 points)



La figure ci-jointe montre une grille 3×3 ayant 9 points étiquetés par A, B, C, D, E, F, K, L et M. Il existe un chemin reliant chaque paire de points adjacents, soit orthogonalement (c'est-à-dire horizontal ou vertical) ou diagonalement. Une tortue marche sur cette grille en alternant des mouvements orthogonaux et diagonaux. On peut décrire n'importe quelle suite de chemins en fonction des lettres $A, ..., M$. Par exemple, $A-B-F$ décrit une suite de deux chemins AB et BF.

Quel est le nombre maximum de chemins que la tortue peut parcourir sachant qu'elle ne traverse aucun chemin plus d'une fois ?

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Page à identification unique
– aucune photocopie!

Question B4 (6 points)

Considérer le triangle ABC avec les angles $\angle BAC = 24°$ et $\angle ACB = 28°$. Le point D est construit de façon que AB est parallèle à CD, $AD = BC$, et AD et BC ne sont pas parallèles. De même, le point E est construit de façon que AE est parallèle à BC, $AB = CE$, et AB et CE ne sont pas parallèles. Les droites DE et AC se coupent au point P.

Déterminez l'angle $\angle CPE$ (en degrés).

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Page à identification unique
– aucune photocopie!

Question C1 (10 points)

Soit F une fonction qui transforme les nombres entiers en nombres entiers selon les règles suivantes :

$F(n) = n - 3$ si $n \geq 1000$;
$F(n) = F(F(n+5))$ si $n < 1000$.

(a) Trouvez $F(999)$.

(b) Montrez que $F(984) = F(F(F(1004)))$.

(c) Trouvez $F(84)$.

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C1 (suite)

Page à identification unique
– aucune photocopie!

Question C2 (10 points)

(a) Trouvez la distance entre le point $(1, 0)$ et la droite reliant l'origine avec le point $(0, 1)$.

(b) Trouvez la distance entre le point $(1, 0)$ et la droite reliant l'origine avec le point $(1, 1)$.

(c) Trouvez la distance entre le point $(1, 0, 0)$ et la droite reliant l'origine avec le point $(1, 1, 1)$.

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C2 (suite)

Page à identification unique
– aucune photocopie!

Question C3 (10 points)

Alice et Bob jouent à un jeu. Il y a initialement $n \geq 1$ galets dans une pile. Alice et Bob jouent à tour de rôle et Alice joue en premier. Lorsque c'est son tour de jouer, le joueur lance un dé dont les faces sont numérotées 1, 1, 2, 2, 3, 3, et prend au moins un et au plus le nombre montré sur le dé de galets de la pile. La personne qui prend le dernier galet gagne.

(a) Si $n = 2$, quelle est la probabilité que Alice gagne ?

(b) Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle Bob a plus de chance de gagner que Alice ?

(c) Trouvez toutes les valeurs n pour lesquelles Bob a plus de chance de gagner que Alice.

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C3 (suite)

Page à identification unique
– aucune photocopie!

Question C4 (10 points)

Soit n un entier positif et nonnul, soit $\tau(n)$ la somme des diviseurs positifs de n (y compris 1 et lui-même) et soit $\phi(n)$ le nombre d'entiers x, $1 \leq x \leq n$, tels que x et n sont premiers entre eux. Par exemple, si $n = 18$, alors $\tau(18) = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18 = 39$ et $\phi(18) = 6$ puisque 18 et chacun des nombres 1, 5, 7, 11, 13 et 17 sont premiers entre eux.

(a) Montrez que $\phi(n)\tau(n) < n^2$ pour tout entier positif et nonnul n.

(b) Déterminez tous les entiers positifs n tels que $\phi(n)\tau(n) + 1 = n^2$.

(c) Montrez qu'il n'y a aucun entier positif n tel que $\phi(n)\tau(n) + 2023 = n^2$.

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C4 (suite)

Commanditaires

Partenaires académiques

Brock University
Carleton University
Dalhousie University
MacEwan University
Memorial University
University of British Columbia
University of Calgary
University of Manitoba
l'Université du Nouveau-Brunswick
l'Université d'Ottawa
University of Prince Edward Island
University of Regina
University of Saskatchewan
University of Toronto
University of Windsor
Western University
York University