Concours mathématique du lynx du Canada

Solutions pour des problèmes de pratique stimulant

Solution au Problème #1

On commence par montrer que les affirmations (i) et (iii) sont FAUSSES. Pour ce faire, nous remplacerons les termes abstraits yom/yem/yum par des exemples concrets.

Supposons que les yoms sont des Manitobains, les yems des Canadiens et les yums des professeurs de mathématiques. Ceci est cohérent avec les informations fournies dans cette question, à savoir que tous les Manitobains sont Canadiens et qu'au moins un professeur de mathématiques est Manitobain.

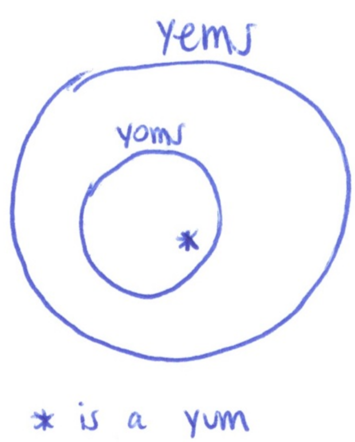
L'affirmation (i) devient alors "Tous les Canadiens doivent être professeurs de mathématiques". Cet exemple concret nous indique immédiatement que l'affirmation (i) est FAUSSE.

Supposons que les yoms sont des Manitobains, les yems des Canadiens et les yums des êtres humains. Cela est cohérent avec les informations fournies dans cette question, à savoir que tous les Manitobains sont des Canadiens et qu'au moins un être humain est un Manitobain.

L'énoncé (iii) devient alors "Au moins un Canadien ne doit pas être un être humain". Cet exemple concret nous indique immédiatement que l'affirmation (iii) est FAUSSE.

Enfin, on montre que l'affirmation (ii) est VRAIE.

Puisque TOUS les yoms sont des yems, nous pouvons dessiner deux cercles, où le cercle représentant l'ensemble des yoms est à l'intérieur du cercle représentant l'ensemble des yems.



On sait également qu'au moins un yum est un yom. Nous pouvons donc placer une étoile (*) à l'intérieur de l'ensemble des yoms pour indiquer que ce yum appartient à l'ensemble des yoms.

Cette étoile (*) se trouve à l'intérieur de l'ensemble des yems. Cela implique que cette étoile (*) est aussi un yem.

En d'autres termes, on a montré qu'"au moins un yem doit être un yum", ce qui nous permet de conclure que l'affirmation (ii) est VRAIE.

Ainsi, une seule de ces trois affirmations est vraie. La bonne réponse est donc (b).

Solution au Problème #2

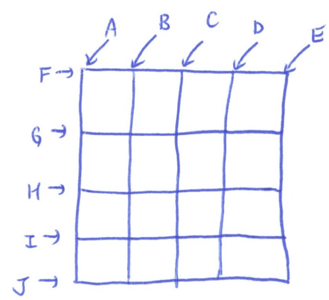
La façon naturelle de résoudre ce problème est d'effectuer une analyse de cas. Pour chaque dimension possible, on détermine combien de rectangles (ou de carrés) apparaissent dans la grille 4×4 .

Dimension	**Options**	**Dimension**	**Options**	**Dimension**	**Options**	**Dimension**	**Options**
1 x 1	16	2 x 1	12	3 x 1	8	4 x 1	4
1 x 2	12	2 x 2	9	3 x 2	6	4 x 2	3
1 x 3	8	2 x 3	6	3 x 3	4	4 x 3	2
1 x 4	4	2 x 4	3	3 x 4	2	4 x 4	1

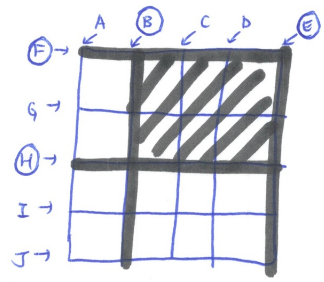
Par exemple, on peut facilement vérifier qu'il y a 12 rectangles possibles qui sont 1×2, avec une hauteur de 1 et une longueur de 2, puisque chacune des quatre lignes nous donne trois options. En général, il existe $(5 - x) * (5 - y)$ rectangles possibles dont les dimensions sont $x \times y$.

La réponse au problème est donc $16+12+8+4+12+9+6+3+8+6+4+2+4+3+2+1 = 100$.

Voici une façon plus élégante de résoudre le problème. Étiquetons les lignes verticales A, B, C, D, E, et les cinq lignes horizontales F, G, H, I, J.



Voici l'idée clé : chaque rectangle ou carré est **l'intersection de deux lignes verticales et de deux lignes horizontales.** Par exemple, si on choisit les deux lignes verticales B et E, ainsi que les deux lignes horizontales F et H, alors le rectangle produit par l'intersection de ces quatre lignes est illustré ci-dessous:



Le problème se réduit alors à la question suivante : de combien de façons pouvons-nous choisir deux des cinq lignes verticales et deux des cinq lignes horizontales? Il y a $\binom{5}{2} = 10$ façons de choisir deux des cinq lignes verticales (AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE) et il en va de même pour les lignes horizontales.

Il y a $10 \times 10 = 100$ carrés/rectangles dans la grille 4×4. La bonne réponse est (d).

Solution au Problème #3

Dans le cas $n = 4$, les diviseurs de $n^2 = 16$ sont $\{1, 2, 4, 8, 16\}$. Donc

$$f(4) = \frac{4}{4+1} + \frac{4}{4+2} + \frac{4}{4+4} + \frac{4}{4+8} + \frac{4}{4+16}$$

Voici l'idée clé : écrivons cette même somme dans l'ordre inverse.

$$f(4) = \frac{4}{4+16} + \frac{4}{4+8} + \frac{4}{4+4} + \frac{4}{4+2} + \frac{4}{4+1}$$

Additionnons maintenant les deux équations. On obtient

$$2f(4) = \left(\frac{4}{4+1} + \frac{4}{4+16}\right) + \left(\frac{4}{4+2} + \frac{4}{4+8}\right) + \left(\frac{4}{4+4} + \frac{4}{4+4}\right) + \left(\frac{4}{4+8} + \frac{4}{4+2}\right) + \left(\frac{4}{4+16} + \frac{4}{4+1}\right).$$

Cela se simplifie de la façon suivante

$$2f(4) = \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{20}\right) + \left(\frac{4}{6} + \frac{4}{12}\right) + \left(\frac{4}{8} + \frac{4}{8}\right) + \left(\frac{4}{12} + \frac{4}{6}\right) + \left(\frac{4}{20} + \frac{4}{5}\right) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

On voit que $2f(4)$ est égal à 5, à savoir le nombre de diviseurs positifs de 4^2. Justifions maintenant que cette relation est valable pour toutes les valeurs de n.

Soit $\tau(n^2)$ le nombre de diviseurs positifs de n^2. Montrons que $2f(n) = \tau(n^2)$.

Tout comme dans l'exemple ci-dessus avec $n = 4$, on écrit les termes de $f(n)$ deux fois: dans l'ordre croissant et dans l'ordre décroissant. Ainsi, si l'un des termes est $\frac{n}{n+x}$ et l'autre terme $\frac{n}{n+y}$, on observe que $xy = n^2$.

En effet, le produit du premier terme et du dernier terme est n^2, le produit du deuxième terme et de l'avant-dernier terme est n^2, et ainsi de suite. Ce schéma doit persister puisqu'on écrit les diviseurs de n^2 par ordre croissant et que le produit de chaque paire de termes (en comptant à partir des extrémités) doit donner n^2.

Ainsi, lorsqu'on additionne les deux équations, on obtient $f(n) + f(n)$ à gauche tandis qu'à droite on obtient la somme des termes $\tau(n^2)$. Chaque terme du côté droit est égal à 1, puisque

$$\frac{n}{n+x} + \frac{n}{n+y} = \frac{n}{n+x} + \frac{n}{n+\frac{n^2}{x}} = \frac{n}{n+x} + \frac{1}{1+\frac{n}{x}} = \frac{n}{n+x} + \frac{x}{x+n} = \frac{n+x}{n+x} = 1.$$

Il s'ensuit que $f(n) + f(n) = \tau(n^2) \times 1$, ce qui permet de conclure que $f(n) = \frac{1}{2} \times \tau(n^2)$.

Comme $2023 = 7 \times 17 \times 17$, il s'ensuit que $\tau(2023^2) = \tau(7^2 \times 17^4) = (2+1)(4+1) = 15$. En effet, chaque diviseur de $2023^2 = 7^2 \times 17^4$ doit être de la forme $7^p \times 17^q$ et il y a 3 choix pour p (à savoir tout p dans l'intervalle $[0, 2]$) et 5 choix pour q (à savoir tout q dans l'intervalle $[0, 4]$). On conclut que $f(2023) = \frac{1}{2} \times \tau(2023^2) = \frac{15}{2}$.

Supposons que t est un entier pour lequel $f(t) = \frac{15}{2}$. Par le même raisonnement que ci-dessus, $\tau(t^2)$ doit être égal à 15, ce qui implique que t^2 doit avoir exactement 15 diviseurs.

Comme $15 = 1 \times 15 = 3 \times 5$, on peut voir que t^2 a exactement 15 diviseurs dans un seul des deux cas suivants : lorsque $t^2 = p^{14}$ pour un nombre premier p, ou lorsque $t^2 = q^2r^4$ pour des nombres premiers q et r. Ainsi, $t = p^7$ ou $t = qr^2$.

L'objectif consiste à trouver un entier $t < 2023$ qui est impair et qui est aussi proche que possible de 2023. Si $t = p^7$, on voit que la plus petite possibilité est $t = 3^7 = 2187$, soit un nombre qui est plus grand que 2023. On peut donc éliminer ce cas.

Si $t = qr^2$, on peut alors essayer différentes valeurs premières de r, pour voir à quel point on est en mesure de se rapprocher de 2023. Comme t est impair, nous n'avons pas besoin de considérer le cas $r = 2$.

Si $r = 3$, alors $t = qr^2 = 9q$ et on voit que $q = 223$ le nombre premier le plus près parmi ceux qui sont inférieurs à 2023/9. Ainsi, $t = 223 \times 3^2 = 2007$ dans ce cas.

Si $r = 5$, alors $t = qr^2 = 25q$ et on voit que $q = 79$ le nombre premier le plus près parmi ceux qui sont inférieurs à 2023/25. Ainsi, $t = 79 \times 5^2 = 1975$ dans ce cas.

Si $r = 7$, alors $t = qr^2 = 49q$ et on voit que $q = 41$ le nombre premier le plus près parmi ceux qui sont inférieurs à 2023/49. Ainsi, $t = 41 \times 7^2 = 2009$ dans ce cas.

À partir de là, une simple analyse de cas montre que pour des nombres premiers plus grands r, on ne peut pas obtenir une valeur pour t qui soit plus proche de 2009. On peut également factoriser manuellement chacun des nombres premiers r $2011, 2013, 2015, 2017, 2019, 2021$ et montrer qu'aucun de ces nombres n'est de la forme $t = qr^2$.

Par conséquent, $t = 2009$ est le plus grand entier impair inférieur à 2023 pour lequel $f(t) = f(2023)$. Puisque la question demandait le plus petit entier positif x pour lequel $f(2023 - 2x) = f(2023)$, on conclut que $2023 - 2x = 2009$, d'où $x = 7$.

La bonne réponse est (b).