Olympiade mathématique junior du Canada

Solutions officielles - 2023 OMJC

P1. Soient a et b des entiers non négatifs. On considère une suite $s_1, s_2, s_3, \ldots$ telle que $s_1 = a$, $s_2 = b$ et $s_{i+1} = |s_i - s_{i-1}|$ pour $i \geq 2$. Prouvez qu'il existe un indice i pour lequel $s_i = 0$.

Solution 1. Notons tout d'abord que pour tous les entiers *positifs* x et y, on a

$$|x - y| = \max(x, y) - \min(x, y) \leq \max(x, y) - 1 < \max(x, y).$$

Il est évident que la suite $(s_i)_{i\geq 1}$ est formée d'entiers non négatifs. En vue de procéder par contradiction, supposons que $s_i \geq 1$ pour tout $i \geq 1$. Alors, pour tout entier positif k,

$$\begin{aligned} s_{2(k+1)-1} &= s_{2k+1} = |s_{2k} - s_{2k-1}| < \max(s_{2k-1}, s_{2k}) \\ s_{2(k+1)} &= s_{2k+2} = |s_{2k+1} - s_{2k}| < \max(s_{2k}, s_{2k+1}) \\ &\leq \max(s_{2k}, \max(s_{2k-1}, s_{2k})) = \max(s_{2k-1}, s_{2k}). \end{aligned}$$

Ainsi, si $b_k = \max(s_{2k-1}, s_{2k})$, alors

$$b_{k+1} = \max(s_{(2(k+1)-1}, s_{2(k+1)}) < \max(s_{2k-1}, s_{2k}) = b_k,$$

donc $(b_k)_{k\geq 1}$ est une suite décroissante. Mais cela signifie que $b_k = 0$ pour un certain k, ce qui nous donne la contradiction désirée. $\square$

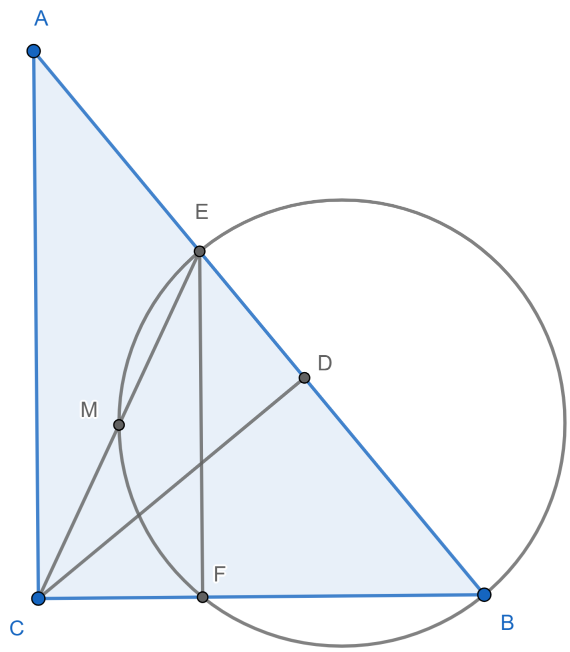
Solution 2. Pour les entiers non négatifs x et y, on a $|x - y| \leq \max(x, y)$. Par conséquent

$$\max(s_{i+1}, s_{i+2}) = \max(s_{i+1}, |s_i - s_{i+1}|) \leq \max(s_i, s_{i+1}).$$

La suite $(\max(s_i, s_{i+1}))$ est donc non croissante. Puisqu'elle est bornée par 0, cette suite devient tôt ou tard constante, c'est-à-dire qu'il existe C et N tels que $\max(s_i, s_{i+1}) = C$ pour tout $i \geq N$. On peut donc supposer que $s_N = C$ (sinon, on remplace N par $N+1$). Si $s_{N+1} = C$, alors $s_{N+2} = |C - C| = 0$, comme souhaité. Si $s_{N+1} = 0$, alors nous avons clairement terminé. Enfin, si $0 < s_{N+1} < C$, alors $s_{N+2} = C - s_{N+1} < C$, donc $\max(s_{N+1}, s_{N+2}) < C$, ce qui nous donne la contradiction désirée. $\square$

P2. Un triangle acutangle est un triangle dont les trois angles sont aigus (inf´erieur ‘a 90°). Soit ABC un triangle rectangle avec $\angle ACB = 90°$. Soit CD la hauteur de abaissée de C sur AB et soit E l'intersection de la bissectrice de $\angle ACD$ avec AD. Soit EF la hauteur abaissée de E sur BC. Prouvez que le cercle circonscrit à BEF passe par le milieu de CE.

Solution. Nous proposons deux solutions.



Solution 1:

Posons $\angle CBA = x$. Alors $\angle ACD = 90° - \angle CAD = x$, donc $\angle ACE = x/2$.

Ainsi $\angle BCE = 90° - x/2$ et

$$\angle CEB = 180° - \angle BCE - \angle CBE = 180° - (90° - x/2) - x = 90° - x/2 = \angle BCE,$$

d'où $|BC| = |BE|$.

Soit M le point milieu de EDC. Comme $|BE| = |BC|$, on a $\angle BME = 90°$.

Puisque $\angle BFE = 90°$, cela implique que $BFME$ est cyclique, ce qui complète la démonstration.

Solution 2:

Soient $|AB| = c$, $|BC| = a$ et $|CA| = b$. Comme ABC et CBD sont des triangles semblables (à angle droit), on a

$$\frac{|CD|}{b} = \frac{|DB|}{a} = \frac{a}{c},$$

ainsi $|CD| = ab/c$ et $|DB| = a^2/c$. Par conséquent $|AD| = c - |DB| = b^2/c$. Comme $|CE|$ est la bissectrice de l'angle, on pose $x = |ED|$ et on a alors

$$\frac{x}{b^2/c - x} = \frac{|DE|}{|EA|} = \frac{|CD|}{|CA|} = \frac{ab/c}{b} = \frac{a}{c}.$$

Cela donne $x = ab^2/c^2 - (a/c)x$, d'où

$$x = \frac{ab^2}{c(a+c)} = \frac{a(c^2-a^2)}{c(a+c)} = \frac{a(c-a)}{c}.$$

Par conséquent,

$$|BE| = |BD| + |DE| = \frac{a(c-a)}{c} + \frac{a^2}{c} = \frac{ac}{c} = a = |BC|.$$

Soit M le point milieu de EDC. Comme $|BE| = |BC|$, on a$\angle BME = 90°$.

Puisque $\angle BFE = 90°$, cela implique que $BFME$ est cyclique, ce qui complète la démonstration.

$\square$

P3. William pense à un nombre entier compris entre 1 et 50, inclusivement. Victor peut choisir un nombre entier positif m et demander à William : “Est-ce que m divise ton nombre ?”. William doit alors répondre véridiquement. Victor continue à poser des questions jusqu'à ce qu'il détermine le nombre de William. Quel est le nombre minimum de questions que Victor doit poser pour garantir cela ?

Solution. Le nombre minimum de questions est 15.

Tout d'abord, on montre que 14 questions ou moins ne suffisent pas à garantir le succès. Supposons que Victor pose au plus 14 questions et que William réponde par "non" à chaque question, sauf si $m = 1$. Notons que ces réponses sont compatibles avec le fait que le nombre secret est 1. Mais comme il y a 15 nombres premiers inférieurs à 50, un certain nombre premier p n'a jamais été choisi en guise de m. Cela signifie que les réponses sont également compatibles avec le fait que le nombre secret soit p. Par conséquent, Victor ne peut pas déterminer le nombre avec certitude car 1 et p sont deux options possibles.

On montre maintenant que Victor peut toujours déterminer le nombre avec 15 questions. Soit N le nombre secret de William. Tout d'abord, Victor pose 4 questions, avec $m = 2, 3, 5$ et 7. On s'intéresse ensuite aux réponses de William.

Case 1. *William répond "non" aux quatre questions.*

N ne peut être divisible que par des nombres premiers égaux ou supérieurs à 11. Cela signifie que N ne peut pas avoir plusieurs facteurs premiers (sinon $N \geq 11^2 > 50$), donc soit $N = 1$, soit N est l'un des 11 nombres premiers restants inférieurs à 50. Victor peut alors poser 11 questions avec $m = 11, 13, 17, \ldots, 47$, à savoir une pour chacun des nombres premiers restants, afin de déterminer la valeur de N.

Case 2. *William répond "oui" à $m = 2$ et "non" à $m = 3, 5$ et 7.*

Il n'y a que 11 valeurs possibles de N qui correspondent à ces réponses (2, 4, 8, 16, 22, 26, 32, 34, 38, 44 et 46). Victor peut utiliser ses 11 questions restantes pour chacune de ces possibilités.

Case 3. *William répond "oui" à $m = 3$ et “non” à $m = 2, 5$ et 7.*

Il y a 5 valeurs possibles de N (3, 9, 27, 33 et 39). Comme dans le cas 2, Victor peut poser des questions sur chacun de ces 5 nombres pour déterminer la valeur de N.

Case 4. *William répond "oui" à plusieurs questions, ou un "oui" à $m = 5$ ou $m = 7$.*

Soit k le produit de tous les m qui ont reçu une réponse positive. Puisque N est divisible par chacun de ces m, N doit être divisible par k. Puisque $k \geq 5$, il y a au plus 10 multiples de k entre 1 et 50. Victor peut poser des questions sur chacun de ces multiples de k avec ses questions restantes. □

P4. Il y a 20 élèves dans une classe d'école secondaire et chaque élève a exactement trois amis intimes dans la classe. Cinq des élèves ont acheté des billets pour un concert à venir. Si un élève voit que deux ou plusieurs de ses trois amis intimes ont acheté des billets, il en achètera un aussi.

Est-il possible que tous les élèves de la classe achètent des billets pour le concert ?

(On suppose que l'amitié est mutuelle ; si l'élève A est un ami intime de l'élève B, alors B est un ami intime de l'élève A).

Solution 1. Il est impossible que tous les élèves de la classe achètent des billets pour le concert.

Si deux élèves A et B sont des amis intimes et si A a acheté un billet pour le concert tandis que B ne l'a pas fait, alors A *incite* B. On appelle cette paire (A, B) une *incitation*.

Pour qu'un élève change d'avis et achète un billet, il doit d'abord être incité par au moins 2 de ses 3 amis intimes. Cela signifie qu'il ne peut inciter qu'un seul autre ami. Par conséquent, le nombre total d'incitations parmi les élèves diminue de 1 chaque fois qu'un élève change d'avis et achète un billet.

Au départ, le nombre maximum d'incitations est de 15 (chacun des 5 premiers élèves ayant des billets a 3 amis à inciter). Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que toute la classe achète des billets. Après que les 14 premières personnes ont acheté des billets, le nombre d'incitations est au maximum de $15 - 14 = 1$. Cela n'est pas suffisant pour convaincre la dernière personne d'acheter un billet, puisqu'elle a besoin de 2 incitations.

Il est donc impossible que toute la classe achète des billets. □

Solution 2. On utilisera le terme *amitié* pour désigner une paire non ordonnée d'élèves qui sont des amis intimes. Comme chacun des 20 élèves fait partie d'exactement 3 amitiés, il y a exactement 30 amitiés dans la classe. (Nous pourrions également représenter les amitiés comme des arêtes dans un graphe non orienté dont les sommets sont les 20 élèves).

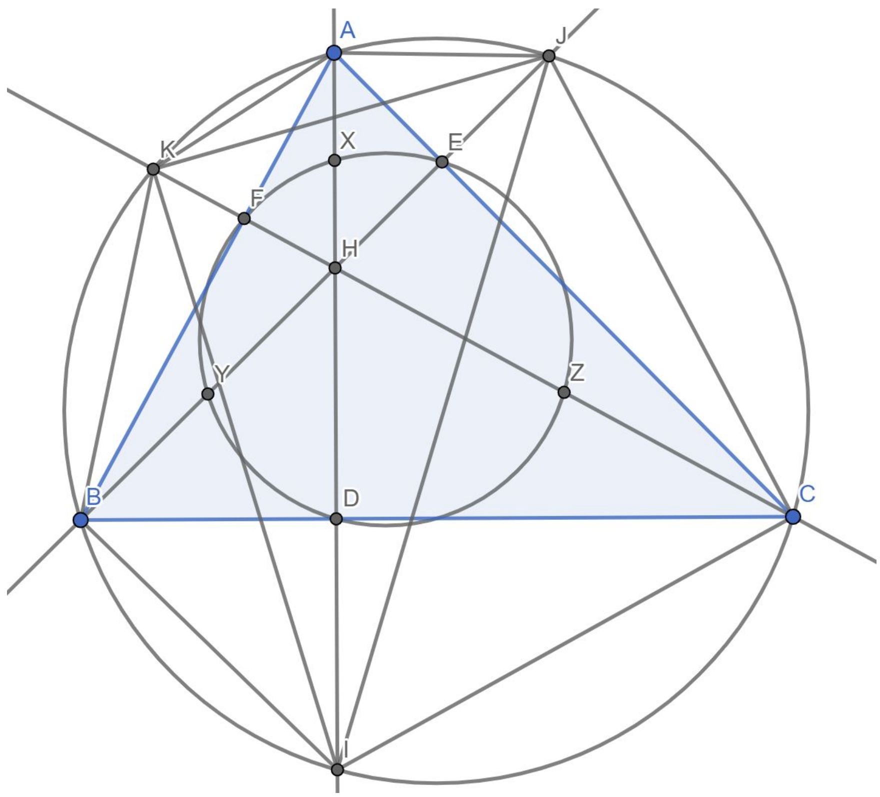
On dira d'une amitié qu'elle est *consommée* si l'un des élèves de cette amitié achète un billet après les cinq premiers acheteurs et que, à ce moment-là, l'autre étudiant possède déjà un billet. Chaque fois qu'un billet est acheté après les cinq premiers acheteurs, au moins deux amitiés sont consommées. Observons qu'aucune amitié n'est consommée deux fois.

Si les 20 élèves achètent des billets, alors trois amitiés sont consommées lorsque le dernier élève achète un billet. Cela implique que le nombre d'amitiés consommées est au moins $14 \times 2 + 3 = 31$, ce qui est supérieur au nombre d'amitiés. Cette contradiction prouve qu'il n'est pas possible que toute la classe achète des billets. □

P5. Un triangle acutangle est un triangle dont les trois angles sont aigus (inf´erieur ‘a 90°). Soit ABC un triangle acutangle dont les hauteurs AD, BE et CF se rencontrent en un point H. Le cercle passant par les points D, E et F rencontre AD, BE et CF à nouveau en X, Y et Z respectivement. Prouvez l'inégalité suivante :

$$\frac{AH}{DX} + \frac{BH}{EY} + \frac{CH}{FZ} \geq 3.$$

Solution. Soit le cercle circonscrit à ABC qui rencontre les hauteurs AD, BE et CF à nouveau en I, J et K respectivement.



Lemma (cercle des neuf points)**.** *I, J, K sont les réflexions de H sur BC, CA et AB. De plus, D, E, F, X, Y et Z sont les points milieux de HI, HJ, HK, HA, HB et HC.*

Proof. Comme $ABDE$ et $ABIC$ sont cycliques, on voit que

$$\angle EBD = \angle EAD = \angle CAI = \angle CBI.$$

Les droites BI et BH sont donc des réflexions sur BC. De même, CH et CI sont des réflexions sur BC, donc I est la réflexion de H sur BC. Les affirmations analogues pour J et K s'ensuivent. Une dilatation $\times 2$ de H établit maintenant le résultat. $\square$

Par le lemme, on obtient $AI = 2XD$, $BJ = 2EY$ et $CK = 2FZ$. Cela est donc équivalent à montrer que

$$\frac{AH}{2DX} + \frac{BH}{2EY} + \frac{CH}{2FZ} \geq \frac{3}{2},$$

qui est à son tour équivalent à

$$\frac{AH}{AI} + \frac{BH}{BJ} + \frac{CH}{CK} \geq \frac{3}{2}. \tag{*}$$

Soit $a = JK$, $b = KI$ et $c = IJ$. Toujours en vertu du lemme, on trouve $AH = AK = AJ$, donc par le théorème de Ptolémée appliqué à $AKIJ$,

$$AJ \cdot KI + AK \cdot IJ = AI \cdot JK.$$

Subsituons et arrangeons les termes :

$$\begin{aligned} AH \cdot b + AH \cdot c &= AI \cdot a \\ AH \cdot (b + c) &= AI \cdot a \\ \frac{AH}{AI} &= \frac{a}{b+c}. \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\frac{BH}{BJ} = \frac{b}{c+a} \qquad \text{et} \qquad \frac{CH}{CK} = \frac{c}{a+b}.$$

En replaçant ces éléments dans (*), l'inégalité souhaitée devient

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

C'est ce qu'on appelle l'inégalité de Nesbitt, pour laquelle il y a de nombreuses preuves. L'une de ces preuves est présentée ci-dessous.

Ajoutons 3 aux deux côtés et réarrangeons les termes :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) \geq \frac{3}{2} + 3 \\ \iff \quad & \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2} \\ \iff \quad & (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2} \\ \iff \quad & \frac{(b+c)+(c+a)+(a+b)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}} \end{aligned}$$

ce qui est vrai en vertu de l'inégalité arithmético-harmonique. $\square$

