

Olympiade mathématique du Canada 2023



Un concours de la Société mathématique du Canada .

Examen Officiel

- P1. William pense à un nombre entier compris entre 1 et 50, inclusivement. Victor peut choisir un nombre entier positif m et demander à William : “Est-ce que m divise ton nombre ?”. William doit alors répondre véridiquement. Victor continue à poser des questions jusqu’à ce qu’il détermine le nombre de William. Quel est le nombre minimum de questions que Victor doit poser pour garantir cela ?
- P2. Il y a 20 élèves dans une classe d’école secondaire et chaque élève a exactement trois amis proches dans la classe. Cinq des élèves ont acheté des billets pour un concert à venir. Si un élève voit que deux ou plus de ses trois amis proches ont acheté des billets, il en achètera un aussi.
Est-il possible que toute les élèves de la classe achète des billets pour le concert ?
(On suppose que l’amitié est mutuelle ; si l’étudiant A est un ami proche de l’étudiant B , alors B est un ami proche de l’étudiant A).
- P3. Un triangle acutangle est un triangle dont les trois angles sont aigus (inférieur à 90°). Soit ABC un triangle acutangle dont les hauteurs AD , BE et CF se rencontrent en un point H . Le cercle passant par les points D , E et F rencontre AD , BE et CF à nouveau en X , Y et Z respectivement. Prouvez l’inégalité suivante :

$$\frac{AH}{DX} + \frac{BH}{EY} + \frac{CH}{FZ} \geq 3.$$

- P4. Soit $f(x)$ un polynôme non-constant à coefficients entiers tel que $f(1) \neq 1$. Pour un entier positif n , on définit $\text{divs}(n)$ comme l’ensemble des diviseurs positifs de n .

Un entier positif m est dit f -sympa s’il existe un entier positif n pour lequel

$$f[\text{divs}(m)] = \text{divs}(n).$$

Prouvez que pour tout tel f , il existe un nombre fini d’entiers f -sympa.

(La notation $f[S]$ pour un certain ensemble S désigne l’ensemble $\{f(s) : s \in S\}$.)

P5. Dans un pays il y a n villes et des routes à double sens relient certaines paires de ces villes.

Quelqu'un remarque que si le pays est divisé en deux parties de n'importe quelle manière, il y aura au plus kn routes entre les deux parties (où k est un nombre entier positif fixé).

1 Quel est le plus grand nombre entier m (en termes de n et k) tel qu'il est garanti d'avoir un ensemble de m villes, dont aucune paire n'est directement reliée par une route ?

Important!

Prière de ne pas discuter du contenu de l'examen en ligne d'ici 24 heures après la fin de l'OMC!
