

Olympiade mathématique junior du Canada 2023



Un concours de la Société mathématique du Canada .

Examen Officiel

- P1. Soient a et b des entiers non négatifs. On considère une suite s_1, s_2, s_3, \dots telle que $s_1 = a$, $s_2 = b$ et $s_{i+1} = |s_i - s_{i-1}|$ pour $i \geq 2$. Prouvez qu'il existe un indice i pour lequel $s_i = 0$.
- P2. Un triangle acutangle est un triangle dont les trois angles sont aigus (inférieur à 90°). Soit ABC un triangle rectangle avec $\angle ACB = 90^\circ$. Soit CD la hauteur de issue du sommet C sur AB et soit E l'intersection de la bissectrice de $\angle ACD$ avec AD . Soit EF la hauteur abaissée de E sur BC . Prouvez que le cercle circonscrit à BEF passe par le milieu de CE .
- P3. William pense à un nombre entier compris entre 1 et 50, inclusivement. Victor peut choisir un nombre entier positif m et demander à William : "Est-ce que m divise ton nombre ?". William doit alors répondre véridiquement. Victor continue à poser des questions jusqu'à ce qu'il détermine le nombre de William. Quel est le nombre minimum de questions que Victor doit poser pour garantir cela ?
- P4. Il y a 20 élèves dans une classe d'école secondaire et chaque élève a exactement trois amis intimes dans la classe. Cinq des élèves ont acheté des billets pour un concert à venir. Si un élève voit que deux ou plusieurs de ses trois amis proches ont acheté des billets, il en achètera un aussi. Est-il possible que toute les élèves de la classe achète des billets pour le concert ?
(On suppose que l'amitié est mutuelle ; si l'étudiant A est un ami intime de l'étudiant B , alors B est un ami intime de l'étudiant A).
- P5. Soit ABC un triangle acutangle dont les hauteurs AD , BE et CF se rencontrent en un point H . Le cercle passant par les points D , E et F rencontre AD , BE et CF à nouveau en X , Y et Z respectivement. Prouvez l'inégalité suivante :

$$\frac{AH}{DX} + \frac{BH}{EY} + \frac{CH}{FZ} \geq 3.$$

Important!

Prière de ne pas discuter du contenu de l'examen en ligne d'ici 24 heures après la fin de l'OMJC!
