Qualification de l'Olympiade mathématique du Canada Repêchage 2023

Un concours de la Société mathématique du Canada.

Solutions officielles

February 28, 2023

1 [10 points] Il y a deux imposteurs et sept membres d'équipage sur Polus. De combien de façons les neuf personnes peuvent-elles se répartir en trois groupes de trois, de sorte que chaque groupe comporte au moins deux membres d'équipage? On suppose que les deux imposteurs et les sept membres d'équipage sont tous discernables les uns des autres, mais que les trois groupes sont indiscernable les uns des autres.

Solution: Il y a $\binom{7}{2}$ façons d'assigner 2 coéquipiers au premier imposteur et $\binom{5}{2}$ façons d'assigner 2 coéquipiers au second imposteur. Cela porte le total à $\binom{7}{2}\binom{5}{2} = 210$ façons.

2 [10 points] De combien de façon peut-on remplir une grille de taille 3×3 avec les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, de sorte que les trois éléments d'une même ligne ou d'une même colonne forment une progression arithmétique d'une certaine raison? (Chaque nombre doit être utilisé exactement une fois)

Solution: Il y a plusieurs façons différentes de remplir la grille. Puisque l'ordre des lignes et des colonnes n'a pas d'importance, nous pouvons supposer que le 1 se trouve dans le coin supérieur gauche. Les deux progressions arithmétiques contenant le 1 peuvent être choisies parmi $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 7\}$, and $\{1, 5, 9\}$. Certaines de ces progressions arithmétiques se chevauchent et il y a quatre cas que nous devons considérer. Notons que dans chaque cas il y a 2 façons de choisir les emplacements de chacune des progressions arithmétiques (selon qu'une progression arithmétique donnée est placée le long d'une ligne ou d'une colonne). Nous pouvons donc choisir un cas de figure et multiplier par 8.

Cas 1:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & a & b \\ 7 & c & d \end{array}$$

Ici, il nous faut choisir $\{b, d\} = \{6, 9\}, \{a, c\} = \{5, 8\}$. Il y a deux arrangements, à savoir $(a, b, c, d) = (5, 6, 8, 9), (8, 6, 5, 9)$.

Cas 2:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & a & b \\ 9 & c & d \end{matrix}$$

Ici, on a forcément $\{a, c\} = \{4, 6\}$, mais il y a alors une contradiction car on ne peut pas avoir $\{b, d\} = \{7, 8\}$.

Cas 3:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & a & b \\ 7 & c & d \end{matrix}$$

Ici, on a forcément $\{a, c\} = \{6, 9\}$ and $\{b, d\} = \{2, 8\}$ et il n'y a alors qu'un seul arrangement: $(a, b, c, d) = (6, 2, 9, 8)$.

Cas 4:

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 7 \\ 5 & a & b \\ 9 & c & d \end{matrix}$$

Ici, on a forcément $\{b, d\} = \{6, 8\}$ and $\{a, c\} = \{2, 3\}$ et il n'y a alors qu'un seul arrangement: $(a, b, c, d) = (2, 8, 3, 6)$.

Au total, il y a 4 arrangements, mais nous devons multiplier par 72 puisque nous avons choisi l'emplacement du 1 et l'ordre des éléments dans la même ligne/colonne que le 1. La réponse finale est donc 288.

3 [10 points] Soient Γ_1 et Γ_2 des cercles de rayons r_1 et r_2, respectivement. Supposons que $r_1 < r_2$. Soit T un point d'intersection de Γ_1 et Γ_2 et soit S l'intersection des tangentes externes communes de Γ_1 et Γ_2. Si l'on suppose que les tangentes à Γ_1 et Γ_2 au point T sont perpendiculaires, déterminez la longueur de ST en fonction de r_1 et r_2.

Solution: Soient A et B les centres respectifs de Γ_1 et Γ_2. Soit H le pied de la perpendiculaire à AB passant par le point T. Soient encore U et V les points de de tangence d'une tangente à Γ_1 et Γ_2 au point S, respectivement. Notons que S est sur la droite AB par symétrie. Notre but est donc de calculer TH et SH et d'utiliser le théorème de Pythagore pour terminer.

On a que $TH = \frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$ en utilisant les triangles semblables ATH et ABT. La même paire de triangles semblables nous permet de conclure que $AH = \frac{r_1^2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$. On utilise le fait que les triangles SUA et SVB sont semblables pour conclure que

$$\frac{BS}{AS} = \frac{r_2}{r_1},$$

et après avoir soustrait 1 des deux côtés, on obtient

$$AS = \frac{r_1}{r_2 - r_1} AB = \frac{r_1\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r_2 - r_1}.$$

En additionnant AS et AH, on obtient

$$SH = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}(r_2 - r_1)},$$

de sorte que

$$ST = \frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{r_1 + r_2}{r_2 - r_1}\right)^2} = \frac{\sqrt{2} r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

4 [10 points] Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite de nombres, où tous les a_i sont soit 1 soit -1. Montrez que si

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots = \frac{p}{q}$$

pour des entiers p et q tels que 3 ne divise pas q, alors la suite $a_1, a_2, \ldots$ est périodique ; c'est-à-dire qu'il existe un certain entier positif n tel que $a_i = a_{n+i}$ pour $i = 1, 2, \ldots$.

Solution: Notons tout d'abord que

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{1}{2},$$

de sorte que

$$\frac{(1 + a_1)/2}{3} + \frac{(1 + a_2)/2}{3} + \cdots = \frac{2p + q}{4q}.$$

Le côté gauche est l'unique représentation en base 3 du côté droite (puisque chaque $(1 + a_i)/2$ est soit 0 soit 1). Il doit donc ultimement être périodique. Pour montrer la périodicité, notons que si nous avons une certaine suite périodique

$$\frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \ldots,$$

avec $b_i = b_{n+i}$, alors cette somme est égale à

$$\frac{b_1 3^{n-1} + b_2 3^{n-2} + \cdots + b_n}{3^n - 1},$$

dont le dénominateur n'est pas divisible par 3. Ainsi, étant donnée une certaine suite ultimement périodique, nous la comparons à la suite périodique; aucune d'entre elles n'a un dénominateur divisible par 3 (puisque $4q$ n'a pas de facteur 3). Leur différence doit avoir un dénominateur divisible par 3 si elle est non nulle, ce qui signifie que la différence est exactement 0 et donc que la suite est effectivement périodique.

5 [10 points] On dispose de six jeux de n cartes numérotées de 1 à n. Mélanie organise chacun des jeux de cartes dans un certain ordre, de sorte que pour tout nombre distinct x, y, et z dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, il y a exactement un jeu de cartes où la carte x est au-dessus de la carte y et la carte y est au-dessus de la carte z. Montrez qu'il existe un certain n pour lequel Mélanie ne peut pas organiser ces six jeux de cartes de sorte à vérifier cette propriété.

Solution: Fixons une carte k. Attribuons ensuite à chaque autre carte c un sextuplet ordonné $(c_1, \ldots, c_6)$, où $c_i = 0$ si c est au-dessus de k dans le paquet i et $c_i = 1$ sinon. Si $n > 65$, il existe au moins deux cartes c et c' avec $c_i = c'_i$ pour tous les i; cela signifie que les positions relatives de c_i et c'_i sont les mêmes dans tous les jeux et, en particulier, que k n'est entre c et c' dans aucun jeu.

6 [10 points] Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ, soit D, E et F les points médians des côtés BC, CA et AB, respectivement. Soit encore J, K et L les points d'intersections respectifs des droites AD, BE et CF avec Γ. Montrez que l'aire du triangle JKL est au moins celle du triangle ABC.

Solution: Soit G le centre de masse du triangle ABC. Soient a, b et c les longueurs des côtés BC, CA et AB, respectivement. Alors, nous pouvons calculer $AD = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$. Par le théorème sur la puissance d'un point par rapport à un cercle, on a $DJ = \frac{a^2}{2\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}$. On a donc

$$GJ = \frac{1}{3}AD + DJ = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}},$$

et

$$\frac{GJ}{GA} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Nous obtenons des formules similaires pour GJ/JB et GJ/JC. Nous avons donc

$$\frac{[JKL]}{[ABC]} = \frac{1}{3}\left(\frac{[JGK]}{[AGB]} + \frac{[KGL]}{[BGC]} + \frac{[LGJ]}{[CGA]}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{GJ \cdot GK}{GA \cdot GB} + \frac{GK \cdot GL}{GB \cdot GC} + \frac{GL \cdot GJ}{GC \cdot GA}\right).$$

En remplaçant dans nos formules, on trouve

$$\frac{[JKL]}{[ABC]} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3} \frac{(2b^2 + 2c^2 - a^2) + (2c^2 + 2a^2 - b^2) + (2a^2 + 2b^2 - c^2)}{(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2c^2 + 2a^2 - b^2)(2a^2 + 2b^2 - c^2)}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3}{(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2c^2 + 2a^2 - b^2)(2a^2 + 2b^2 - c^2)}.$$

Pour finir, notez que les trois termes du dénominateur ont pour moyenne $a^2 + b^2 + c^2$, donc la quantité totale est au moins 1 en vertu de l'inégalité arithmético-géométrique.

7 [20 points]

1. Soit u, v, et w les solutions réelles de l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$. Montrez qu'il existe un polynôme quadratique f à coefficients rationnels tel que $u = f(v)$, $v = f(w)$ et $w = f(u)$.

2. Soit u, v, et w les solutions réelles de l'équation $x^3 - 7x + 4 = 0$. Montrez qu'il n'existe pas de polynôme quadratique f à coefficients rationnels tel que $u = f(v)$, $v = f(w)$ et $w = f(u)$.

Solution: Considérons pour l'instant le cas général où l'équation cubique est $x^3 - mx + n = 0$. Par les formules de Viete, nous savons que $u + v + w = 0$, $uv + vw + wu = -m$ et $uvw = -n$. Soit $u = av^2 + bv + c, v = aw^2 + bw + c, w = au^2 + bu + c$ pour certains nombres rationnels a, b et c.

En multipliant la première équation quadratique ci-dessus par v, on obtient

$$uv = av^3 + bv^2 + cv = a(mv - n) + bv^2 + cv.$$

En additionnant cette expression et les deux expressions similaires $vw = a(mw - n) + bw^2 + cw$ et $wu = a(mu - n) + bu^2 + cu$, on obtient

$$-m = uv + vw + wu = am(u + v + w) - 3an + b(u^2 + v^2 + w^2) + c(u + v + w) = 2bm - 3an.$$

Séparément, en soustrayant les deux premières équations quadratiques, on obtient

$$u - v = (v - w)(a(v + w) + b) = (v - w)(b - au).$$

En multipliant ce résultat et les deux expressions similaires, on obtient

$$(u - v)(v - w)(w - u) = (u - v)(v - w)(w - u)(b - au)(b - av)(b - aw),$$

après avoir procéder aux simplifications (pourquoi peut-on simplifier?), on obtient

$$1 = (b - au)(b - av)(b - aw) = b^3 - mba^2 + na^3.$$

En combinant cette équation et la précédente avec a et b, on obtient

$$1 = b^3 + \left(\frac{(2b + 1)m}{3n}\right)^2 \frac{(1 - b)m}{3}. \tag{$\star$}$$

On a que $b = 1$ est toujours une solution. Mais lorsque $b = 1$, nous avons $a = m/n$. En ajoutant les trois équations originales, on obtient

$$0 = u + v + w = a(u^2 + v^2 + w^2) + b(u + v + w) + 3c = 2m^2/n + 3c,$$

donc $c = -2m^2/3n$.

Enfin, en introduisant $m = u^2 + uv + v^2$ et $n = uv(u + v)$ dans $u = (m/n)v^2 + v - (2m^2/3n)$, on obtient

$$\begin{aligned} 3(u - v)n = m(3v^2 - 2m) &\iff 3(u - v)(u + v)(uv) = -(u^2 + uv + v^2)(u - v)(u + 2v) \\ &\iff u^3 + 6u^2v + 6uv^2 + 2v^3 = 0. \end{aligned}$$

La même équation doit s'appliquer en permutant cycliquement les indices, et nous obtenons donc que $u/v, v/w, w/u$ sont des racines du polynôme $x^3 + 6x^2 + 6x + 2 = 0$, ce qui est impossible puisqu'elles se multiplient par 1. Ainsi, nous avons éliminé le cas $b = 1$.

Notre équation ($\star$) devient maintenant

$$27n^2(b^2 + b + 1) = m^3(4b^2 + 4b + 1),$$

qui se factorise ainsi

$$(4m^3 - 27n^2)(2b + 1)^2 = 81n^2.$$

Cette expression a des racines rationnelles si et seulement si $4m^3 - 27n^2$ est un carré parfait.

1. Lorsque $m = 7, n = 4$, $4m^3 - 27n^2$ n'est pas un carré parfait, donc on ne peut pas trouver a, b et c.

2. Lorsque $m = n = 7$, on a
$$2b + 1 = \pm 9,$$
donc $b = 4, -5$. Nous choisissons $b = 4$ et, d'après la discussion ci-dessus, nous obtenons $a = 3$ et $c = -2am/3 = -14$. Nous devons maintenant vérifier que nous pouvons effectivement choisir les racines u, v et w telles que $u = 3v^2 + 4v - 14$; c'est-à-dire que les racines sont $v, u = 3v^2 + 4v - 14, w = -3v^2 - 5v + 14$. Mais c'est le bel et bien le cas puisque nous pouvons vérifier que les sommes symétriques des racines sont $uv + vw + wu = -7$ et $uvw = -7$.

8 [20 points] Un point commence à l'origine du plan cartésien. Chaque minute, soit il se déplace d'une unité dans la direction x, soit il subit une rotation de θ degrés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre autour de l'origine.

1. Si $\theta = 90^\circ$, déterminez tous les endroits où le point pourrait aboutir.

2. Si $\theta = 45^\circ$, prouvez que pour tout point L du plan cartésien et tout nombre positif ε, il existe une suite de déplacements après quoi le point est situé à une distance inférieure à ε de L.

3. Déterminez tous les nombres rationnels θ tels que pour tout point L du plan cartésien et tout nombre positif ε, il existe une suite de déplacements après quoi le point est situé à une distance inférieure à ε de L.

4. Prouvez que lorsque θ est irrationnel, pour tout lieu L dans le plan cartésien et tout nombre positif ε, il existe une suite de déplacements après quoi le point est situé à une distance inférieure à ε de L.

Solution:

1. La réponse est tous les lieux dont les coordonnées sont entières. Pour atteindre un tel emplacement (x, y) dans le premier quadrant, nous nous déplaçons à droite y fois, nous tournons une fois, et nous nous déplaçons à droite x encore une fois. Pour atteindre un tel emplacement dans n'importe quel autre quadrant, on se déplace jusqu'à l'emplacement correspondant dans le premier quadrant et on effectue une rotation. Après chaque minute, les coordonnées du point sont des nombres entiers, ce sont donc toutes les positions finales possibles pour le point.

2. Pour cette partie et la suivante, nous prouvons d'abord un lemme : nous pouvons parvenir chaque emplacement de la forme
$$\sum_{j=0}^{k} a_j(cos(j\theta), \sin(j\theta)),$$
où les a_j sont des entiers non négatifs. On y parvient en se déplaçant à droite a_k fois, en tournant, en se déplaçant à droite a_{k-1} fois, en tournant, et ainsi de suite.

Pour ce problème, on note que j et $j+4$ donnent le même vecteur mais dans des directions opposées pour $(\cos(j\theta), \sin(j\theta))$, on peut donc sans perte de généralité supposer que les a_k sont des entiers quelconques. Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, il existe des entiers quelconques m et n tels que $|m + n\sqrt{2} - c| < \epsilon/2$. Étant donné les coordonnées (c_1, c_2), on peut donc trouver des vecteurs s'ajoutant à $(m_1 + n_1\sqrt{2}, m_2 + n_2\sqrt{2})$ où $|m_i + n_i\sqrt{2} - c_i| < \epsilon/2$ pour $i = 1, 2$. Ce point satisfait les propriétés.

3. Les réponses sont θ un multiple de 60° ou de 90°. Rappelons que nous avons vu au point précédent que nous pouvons nous rendre à n'importe quel endroit de la forme

$$\sum_{j=0}^{k} a_j(cos(j\theta), \sin(j\theta)),$$

où les a_j sont des entiers non négatifs.

Lorsque $\theta = 60°$, on ne peut obtenir que des lieux de la forme $(m, n\sqrt{3})$ et $(m + \frac{1}{2}, (n + \frac{1}{2})\sqrt{3})$ pour les entiers m et n. Le cas de $\theta = 90°$ est traité dans la partie a).

Supposons maintenant que θ est irrationnel. Nous pouvons trouver j et k tels que $0 < j\theta - 180 - 360k < \epsilon$. Soit $j\theta - 180 - 360k = \delta_1$. Ainsi, $(1, 0) + (\cos(j\theta), \sin(j\theta)) = (O(\delta_1^2), -\delta_1 + O(\delta_1^2))$. De même, en choisissant $-\epsilon < j\theta - 180 - 360k < 0$ et en laissant $180 + 360k - j\theta = \delta_2$, nous pouvons obtenir un vecteur de $(O(\delta_2^2), \delta_2 + O(\delta_2^2))$. En choisissant j_1, k_1, j_2 et k_2 tels que $-\epsilon/2 < j_1\theta - 90 - 360k_1 < 0 < j_2\theta - 270 - 360k_2 < \epsilon/2$ et en admettant que $j_2\theta - j_1\theta - 360(k_2 - k_1) - 180 = \delta_3$, nous pouvons obtenir un vecteur de $(\delta_3 + O(\delta_3^2), O(\delta_3^2))$. En choisissant j_1, k_1, j_2 et k_2 tels que $-\epsilon/2 < j_1\theta - 270 - 360k_1 < 0 < j_2\theta - 90 - 360k_2 < \epsilon/2$, et en laissant $j_2\theta - j_1\theta - 360(k_2 - k_1) + 180 = \delta_4$, on obtient un vecteur de $(-\delta_4 + O(\delta_4^2), O(\delta_4^2))$. En les combinant pour des ϵ suffisamment petits, on peut s'approcher de n'importe quel endroit (c_1, c_2).

Enfin, supposons que θ est rationnel et remplaçons θ par PGCD$(\theta, 360)$. Nous supposons que $\theta \neq 60, 90, 120, 180, 360$, ce qui signifie nécessairement que $\theta \leq 72$. Notons que $\cos\theta$ doit être irrationnel. Supposons qu'il en soit autrement et que $\theta = p/q$. Notons que si $q = 2$, les seules possibilités sont $p = 1, 2$, ce qui conduit à $\theta = 60, 90$, respectivement. Supposons maintenant que $q > 2$. Supposons que $k\theta = 360$. Nous notons que $\cos(k\theta)$ est un polynôme entier de degré k de $\cos\theta$ avec un coefficient principal 2^k. Ainsi, en multipliant les deux côtés de $\cos(k\theta) = 1$ par q^{k-1} et en développant le côté gauche en un polynôme de $\cos\theta$, nous voyons que le premier terme du côté gauche n'est pas un entier, mais que les autres termes des deux côtés le sont, ce qui constitue une contradiction.

4. On trace d'abord une série de n vecteurs unitaires qui vont de 0 à L (ceci est toujours possible un certain n puisque nos vecteurs unitaires peuvent être dans n'importe quelle direction. Ensuite, nous approximons ces vecteurs unitaires avec des vecteurs unitaires qui sont des multiples positifs de θ, chacun d'entre eux ayant une distance d'au moins ε/n; puisque θ est irrationnel, les multiples positifs de θ peuvent approximer n'importe quel angle avec une précision arbitraire. On additionne alors ces n vecteurs et on obtient quelque chose à moins de ε de L.

