Olympiade mathématique junior du Canada 2021

Un concours de la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

Vous trouverez la liste complète de nos commanditaires et partenaires du concours en ligne, à l'adresse suivante : https://smc.math.ca/concours/commanditaires-et-partenaires/

Examen officiel

1. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles concentriques, $\mathcal{C}_1$ étant à l'intérieur de $\mathcal{C}_2$. Soient P_1 et P_2 deux points sur $\mathcal{C}_1$ qui ne sont pas opposés diamétralement l'un à l'autre. Étendons le segment P_1P_2 au-delà de P_2 jusqu'à ce qu'il rencontre le cercle $\mathcal{C}_2$ en un point Q_2. La tangente à $\mathcal{C}_2$ au point Q_2 et la tangente à $\mathcal{C}_1$ au point P_1 se rencontrent au point X. Tracez la seconde tangente à $\mathcal{C}_2$ issue du point X ; elle rencontre $\mathcal{C}_2$ au point Q_1. Démontrez que P_1X est la bissectrice de l'angle $Q_1P_1Q_2$.

2. Combien y a-t-il de façons de permuter les nombres entiers positifs de 1 à n de manière à obtenir une permutation dans laquelle, pour toute valeur $k \leq n$, les k premiers éléments ont des restes distincts mod k ?

3. Soit $ABCD$ un trapèze où AB et CD sont parallèles, avec $|AB| > |CD|$, et les côtés $|AD| = |BC|$ sont de longueur égale. Soit I le centre du cercle tangent aux droites AB, AC et BD, où A et I sont sur les côtés opposés de BD. Soit J le centre du cercle tangent aux droites CD, AC et BD, où D et J sont sur les côtés opposés de AC. Démontrer que $|IC| = |JB|$.

4. Soit $n \geq 2$ un entier fixe et supposons que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres réels strictement positifs satisfaisant $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^n - 1$.

   Trouver la valeur la plus petite possible de l'expression

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1+a_1} + \frac{a_3}{1+a_1+a_2} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}.$$

Olympiade mathématique junior du Canada 2021

5. Une fonction f des entiers strictement positifs dans les entiers strictement positifs est appelée *canadienne* si elle vérifie

$$\mathrm{pgcd}\Big(f(f(x)), f(x+y)\Big) = \mathrm{pgcd}(x, y)$$

pour toute paire d'entiers strictement positifs x et y.

Trouver tous les entiers strictement positifs m tels que $f(m) = m$ pour toute fonction canadienne f.

Important !

Prière de ne pas discuter du contenu de l'examen en ligne d'ici 24 heures.