

46^e Olympiade mathématique du Canada

Mercredi le 2 avril 2014



1. Soit a_1, a_2, \dots, a_n des nombres réels strictement positifs dont le produit est 1. Montrer que la somme

$$\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \frac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)} + \dots + \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$$

est supérieure ou égale à $\frac{2^n - 1}{2^n}$.

2. Soit m et n des entiers positifs impairs. Chaque carré d'un tableau m par n est coloré en rouge ou en bleu. Une rangée est dite rouge-dominante si elle possède plus de carrés rouges que de carrés bleus. Une colonne est dite bleu-dominante si elle possède plus de carrés bleus que de carrés rouges. Trouvez la valeur maximale que peut prendre la somme du nombre de rangées rouge-dominantes et du nombre de colonnes bleu-dominantes. Exprimez votre réponse en termes de m et n .

3. Soit p un nombre premier impair. Un p -tuple $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_p)$ d'entiers est dit *admissible* si

- (i) $0 \leq a_i \leq p - 1$ pour tout i ;
- (ii) $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_p$ n'est pas divisible par p ;
- (iii) $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_pa_1$ est divisible par p .

Déterminez le nombre de p -tuples admissibles.

4. Le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle. Le point P est à l'intérieur de $ABCD$ et $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \angle PDA$. Les droites AD et BC se croisent en Q et les droites AB et CD se croisent en R . Montrez que les droites PQ et PR forment le même angle que les diagonales de $ABCD$.

5. On fixe des entiers $n \geq 1$ et $k \geq 2$. Une liste de n entiers est écrite sur un tableau. À chaque étape, vous pouvez choisir un bloc d'entiers adjacents et j'ajouterai 1 à chacun de ces entiers ou je soustrairai 1 à chacun de ces entiers. Cette étape peut être répétée autant de fois que voulu et il est possible d'adapter le choix du bloc selon mes actions. Montrez qu'après un nombre fini d'étapes, vous serez capable d'atteindre un état pour lequel $n - k + 2$ nombres sur le tableau sont divisibles par k .