PROBLEMS

Click here to submit problems proposals as well as solutions, comments and generalizations to any problem in this section.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **August 15, 2019**.

4441. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let ABC be an acute triangle, with circumcenter O and orthocenter H. Let A', B' and C' be the intersection of AH, BH, CH with BC, AC, AB, respectively. Let A_1, B_1 and C_1 be the intersection of AO, BO, CO with BC, AC, AB, respectively. If A'', B'' and C'' are midpoints of AA_1, BB_1 and CC_1, show that $A'A'', B'B''$ and $C'C''$ have a common intersection point.

4442. *Proposed by Nguyen Viet Hung.*

Find the following limit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}} \right).$$

4443. *Proposed by Andrew Wu.*

Acute scalene $\triangle ABC$ has circumcircle Ω and altitudes $\overline{BE}$ and $\overline{CF}$. Point N is the midpoint of $\overline{EF}$ and line $\overline{AN}$ meets Ω again at Z. Let lines $\overline{ZF}$ and $\overline{ZE}$ meet Ω again at V and U, respectively, and let lines $\overline{CV}$ and $\overline{BU}$ meet at P. Prove that $\overline{UV}$ and $\overline{BC}$ meet on the tangent from P to the circumcircle of $\triangle APN$.

4444. *Proposed by Michel Bataille.*

Let n be a positive integer. Evaluate in closed form

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\tan^2\left(\frac{2k+1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{4}\right) + \cot^2\left(\frac{2k+1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

4445. *Proposed by Leonard Giugiuc and Dan Stefan Marinescu.*

Let ABC be a triangle with $AC > BC > AB$, incenter I and centroid G .

1. Prove that point A lies in one half-plane of the line GI, while points B and C lie in the other half-plane.
2. The line GI intersects the sides AB and AC at M and N, respectively. Prove that $BM = CN$ if and only if $\angle BAC = 60°$.

4446. *Proposed by Florin Stanescu.*

Let n be a prime number greater than 4 and let $A \in M_{n-1}(\mathbb{Q})$ be such that $A^n = I_{n-1}$. Evaluate $\det(A^{n-2} + 2A^{n-3} + 3A^{n-4} + \cdots + (n-2)A + (n-1)I_{n-1})$ in terms of n.

4447. *Proposed by Lorian Saceanu.*

Let ABC be a scalene triangle. Prove that

$$2 + \frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} \geq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C.$$

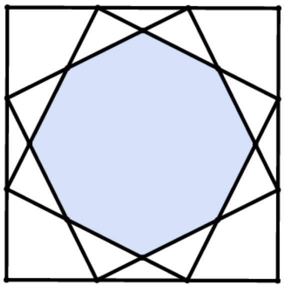
4448. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let a, b, c and d be non-zero complex numbers such that $|a| = |b| = |c| = |d|$ and $Arg(a) < Arg(b) < Arg(c) < Arg(d)$. Prove that

$$|(a-b)(c-d)| = |(a-d)(b-c)| \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a-b)(c-d) = (a-d)(b-c).$$

4449. *Proposed by Arsalan Wares.*

The figure shows two congruent overlapping squares inside a larger square. The vertices of the overlapping smaller squares divide each of the four sides of the largest square into three equal parts. If the area of the shaded region is 50, find the area of the largest square.



4450. *Proposed by Dan Stefan Marinescu, Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Let $n \geq 3$ be an integer and consider positive real numbers $a_1, a_1, \ldots, a_n$ such that $a_n \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$. Prove that

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq 2((n-1)^2 + 1).$$

. . . .

Cliquez ici afin de proposer de nouveaux problèmes, de même que pour offrir des solutions, commentaires ou généralisations aux problèmes proposś dans cette section.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **15 août 2019**.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

4441. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Soit ABC un triangle acutangle, dont le centre du cercle circonscrit est O et l'orthocentre est H. Soient A', B' et C' les points d'intersection de AH, BH et CH avec BC, AC et AB, respectivement. Soient A_1, B_1 et C_1 les points d'intersection de AO, BO et CO avec BC, AC et AB, respectivement. Si A'', B'' et C'' sont les mi points de AA_1, BB_1 et CC_1, démontrer que $A'A'', B'B''$ et $C'C''$ ont un point d'intersection commun.

4442. *Proposed by Nguyen Viet Hung.*

Déterminer la limite suivante

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}} \right).$$

4443. *Proposed by Andrew Wu.*

Le triangle ABC est acutangle et scalène, avec cercle circonscrit Ω et altitudes $\overline{BE}$ puis $\overline{CF}$. Le point N est le mipoint de $\overline{EF}$; la ligne $\overline{AN}$ rencontre Ω de nouveau en Z. Les lignes $\overline{ZF}$ et $\overline{ZE}$ rencontrent Ω de nouveau en V et U, respectivement; les lignes $\overline{CV}$ et $\overline{BU}$ se rencontrent en P. Démontrer que $\overline{UV}$ et $\overline{BC}$ se rencontrent en un point se trouvant sur la tangente au cercle circonscrit de $\triangle APN$ passant par le point P.

4444. *Proposed by Michel Bataille.*

Soit n un entier positif. Évaluer en forme close l'expression

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\tan^2 \left(\frac{2k+1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{4} \right) + \cot^2 \left(\frac{2k+1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

4445. *Proposed by Leonard Giugiuc and Dan Stefan Marinescu.*

Soit ABC un triangle tel que $AC > BC > AB$, le centre du cercle inscrit étant I et le centro ide étant G.

1. Démontrer que la ligne GI intersecte les intérieurs des segments AB et AC.
2. La ligne GI intersecte les côtés AB et AC en M et N, respectivement. Démontrer que $BM = CN$ si et seulement si $\angle BAC = 60°$.

4446. *Proposed by Florin Stanescu.*

Soit n un nombre premier supérieur à 4 et soit $A \in M_{n-1}(\mathbb{Q})$ telle que $A^n = I_{n-1}$. Évaluer

$$\text{dét}(A^{n-2} + 2A^{n-3} + 3A^{n-4} + \cdots + (n-2)A + (n-1)I_{n-1})$$

en termes de n.

4447. *Proposed by Lorian Saceanu.*

Soit ABC un triangle scalène. Démontrer que

$$2 + \frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} \geq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C.$$

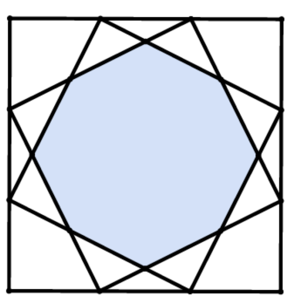
4448. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Soient a, b, c et d des nombres complexes non nuls tels que $|a| = |b| = |c| = |d|$ et $Arg(a) < Arg(b) < Arg(c) < Arg(d)$. Démontrer que

$$|(a-b)(c-d)| = |(a-d)(b-c)| \iff (a-b)(c-d) = (a-d)(b-c).$$

4449. *Proposed by Arsalan Wares.*

La figure montre deux carrés congrus à l'intérieur d'un plus grand carré. Les sommets des deux petits carrés découpent chacun des côtés du grand carré en trois segments de mêmes longueurs. Si la surface colorée est de 50, déterminer la surface du grand carré.



4450. *Proposed by Dan Stefan Marinescu, Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Soit $n \geq 3$ un entier et soient des nombres positifs réels $a_1, a_1, \ldots, a_n$ tels que $a_n \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$. Démontrer que

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq 2((n-1)^2 + 1).$$