OLYMPIAD CORNER

No. 373

The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad.

Click here to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section

To facilitate their consideration, solutions should be received by **August 15, 2019**.

OC431. All natural numbers greater than 1 are coloured with blue or red so that the sum of every two blue numbers (not necessarily distinct) is blue, and the product of every two red ones (not necessarily distinct) is red. It is known that the number 1024 is blue. What colour can the number 2017 be?

OC432. Find the smallest natural number that is a multiple of 80 such that you can rearrange two of its distinct digits and the resulting number will also be a multiple of 80.

OC433. Consider an isosceles trapezoid $ABCD$ with bases AD and BC. A circle ω passing through B and C intersects the side AB and the diagonal BD at points X and Y, respectively. The tangent to ω at C intersects the line AD at Z. Prove that the points X, Y, and Z are collinear.

OC434. The acute isosceles triangle ABC ($AB = AC$) is inscribed in a circle with center O. The rays BO and CO intersect the sides AC and AB at the points B' and C', respectively. A line l parallel to the line AC passes through point C'. Prove that the line l is tangent to the circumcircle ω of the triangle $B'OC$.

OC435. There are n positive numbers $a_1, a_2, \dots, a_n$ written on a blackboard. Under each number a_i, Vasya wants to write a number $b_i \geq a_i$ so that for every pair of numbers chosen from $b_1, b_2, \dots, b_n$, the ratio of one of them to the other is an integer. Prove that Vasya can write out the required numbers so that

$$b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_n \leq 2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

. . . .

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale.

Cliquez ici afin de soumettre vos solutions, commentaires ou généralisations aux problèmes proposés dans cette section.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **15 août 2019**.

La rédaction souhaite remercier Valérie Lapointe, Carignan, QC, d'avoir traduit les problèmes.

OC431. Tous les nombres naturels supérieurs à 1 sont colorés en bleu ou en rouge de sorte que la somme de deux nombres bleus (pas nécessairement distincts) est bleue et le produit de deux nombres rouges (pas nécessairement distincts) est rouge. On sait que le nombre 1024 est bleu. Quelle est la couleur de 2017 ?

OC432. Trouvez le plus petit nombre naturel qui est un multiple de 80 tel que si deux de ses chiffres distincts sont réarrangés, le résultat est toujours un multiple de 80.

OC433. Considérez le trapèze isocèle $ABCD$ dont les bases sont AD et BC. Un cercle ω passant par B et C intercepte le côté AB et la diagonale BD aux points X et Y, respectivement. La tangente à ω au point C intercepte le segment AD au point Z. Prouvez que X, Y, et Z sont colinéaires.

OC434. Le triangle isocèle acutangle ABC ($AB = AC$) est inscrit dans un cercle de centre O. Les rayons BO et CO interceptent les côtés AC et AB aux points B' et C', respectivement. Un segment I parallèle au segment AC passe par le point C'. Prouvez que le segment I est tangent au cercle circonscrit ω du triangle $B'OC$.

OC435. Il y a n nombres positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ écrits sur un tableau. Sous chaque nombre a_i, Vasya veut écrire un nombre $b_i \geq a_i$ tel que pour toute paire de nombres choisi parmi $b_1, b_2, \ldots, b_n$, le quotient de un par l'autre est un entier. Prouvez que Vasya peut écrire ces nombres tels que

$$b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_n \leq 2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$