PROBLEMS

Click here to submit problems proposals as well as solutions, comments and generalizations to any problem in this section.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **June 15, 2019**.

4421. *Proposed by Peter Y. Woo. (Correction.)*

Show that the area of the largest $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ triangle that fits inside the unit square is greater than $1/3$.

4422. *Proposed by Kadir Altintas and Leonard Giugiuc.*

Let ABC be a scalene triangle with incenter I and nine-point center N. Find $\angle A$ given that A, N and I are collinear.

4423. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ be a twice differential function such that

$$f(x) + f''(x) = -x \cdot c^x \cdot f'(x)$$

for all real values of x and an arbitrary constant c. Find $\lim_{x\to 0} x \cdot f(x)$.

4424. *Proposed by Marius Drăgan and Neculai Stanciu.*

Let $k \in \mathbb{N}$ such that $9k + 9, 9k + 10$ and $9k + 13$ are not perfect squares. Prove that

$$[\sqrt{k+x} + \sqrt{k+x+1} + \sqrt{k+x+2}] = [\sqrt{9k+7}]$$

for all $x \in [0, 7/9]$, where $[a]$ denotes the integer part of number a.

4425. *Proposed by Nguyen Viet Hung.*

Prove the following identities

(a) $\tan^3\theta + \tan^3(\theta - 60^\circ) + \tan^3(\theta + 60^\circ) = 27\tan^3 3\theta + 24\tan 3\theta$,

(b) $\dfrac{1}{1+\tan\theta} + \dfrac{1}{1+\tan(\theta-60^\circ)} + \dfrac{1}{1+\tan(\theta+60^\circ)} = \dfrac{3\tan 3\theta}{\tan 3\theta - 1}$.

4426. *Proposed by Michel Bataille.*

Let distinct points A, B, C on a rectangular hyperbola $\mathcal{H}$ be such that $\angle BAC = 90^\circ$. A point M of $\mathcal{H}$, other than A, B, C, is called *good* if the triangles MAB and MAC have the same circumradius. Show that either infinitely many M are good or a unique M is good. Characterize the triangle ABC in the former case and find M and the common circumradius in the latter one.

4427. *Proposed by Max A. Alekseyev.*

Prove that the equation

$$u^8 + v^9 + w^{14} + x^{15} + y^{16} = z^8$$

has infinitely many solutions in positive integers with $\gcd(u, v, w, x, y, z) = 1$.

4428. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let ABC be a triangle and let O be an arbitrary point in the same plane. Let A', B' and C' be the reflections of A, B and C in O. Prove that

$$\frac{AB' \cdot B'C}{AB \cdot BC} + \frac{BC' \cdot C'A}{BC \cdot CA} + \frac{CA' \cdot A'B}{CA \cdot AB} \geq 1.$$

4429. *Proposed by Lorian Saceanu.*

Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{a(b+c)} + \sqrt{b(a+c)} + \sqrt{c(a+b)}}.$$

4430. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let $s \geq \frac{28}{3}$ be a fixed real number. Consider the real numbers a, b, c and d such that

$$a+b+c+d = 4 \quad \text{and} \quad a^2+b^2+c^2+d^2 = s.$$

Find the maximum value of the product $abcd$.

. . . .

Cliquez ici afin de proposer de nouveaux problèmes, de même que pour offrir des solutions, commentaires ou généralisations aux problèmes proposś dans cette section.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **15 juin 2019**.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

4421. *Proposé par Peter Y. Woo. (Correction.)*

Démontrer que pour un triangle $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ situé dans le carré unitaire, la surface doit être supérieure à $1/3$.

4422. *Proposé par Kadir Altintas et Leonard Giugiuc.*

Soit ABC un triangle scalène dont le centre du cercle inscrit est I et le centre du cercle des neuf points est N. Déterminer $\angle A$, prenant pour acquis que A, N et I sont colinéaires.

4423. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ deux fois différentiable, telle que pour toutes valeurs réelles x

$$f(x) + f''(x) = -x \cdot c^x \cdot f'(x),$$

puis une constante arbitraire c. Déterminer $\lim_{x\to 0} x \cdot f(x)$.

4424. *Proposé par Marius Drăgan et Neculai Stanciu.*

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $9k + 9, 9k + 10$ et $9k + 13$ ne sont pas des carrés parfaits. Démontrer que

$$[\sqrt{k+x} + \sqrt{k+x+1} + \sqrt{k+x+2}] = [\sqrt{9k+7}]$$

pour tout $x \in [0, 7/9]$, où $[a]$ dénote la partie entière de a.

4425. *Proposé par Nguyen Viet Hung.*

Démontrer les identités suivantes:

(a) $\tan^3\theta + \tan^3(\theta - 60^\circ) + \tan^3(\theta + 60^\circ) = 27\tan^3 3\theta + 24\tan 3\theta$,

(b) $\dfrac{1}{1+\tan\theta} + \dfrac{1}{1+\tan(\theta-60^\circ)} + \dfrac{1}{1+\tan(\theta+60^\circ)} = \dfrac{3\tan 3\theta}{\tan 3\theta - 1}$.

4426. *Proposé par Michel Bataille.*

Les points distincts A, B et C se trouvent sur une hyperbole rectangulaire $\mathcal{H}$, de façon à ce que $\angle BAC = 90^\circ$. Un point M sur $\mathcal{H}$, distinct de A, B et C, est dit *bon* si les cercles circonscrits des triangles MAB et MAC ont le même rayon r. Démontrer qu'il y a infiniment de bons M ou qu'il n'y en a qu'un seul. Caractériser le triangle ABC si le premier scénario tient ; identifier M et la valeur du rayon commun r si c'est plutôt le deuxième scénario qui tient.

4427. *Proposé par Max A. Alekseyev.*

Démontrer que l'équation

$$u^8 + v^9 + w^{14} + x^{15} + y^{16} = z^8$$

possède un nombre infini de solutions entières positives u, v, w, x, y, z telles que $\gcd(u, v, w, x, y, z) = 1$.

4428. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Soient ABC un triangle, puis O un point arbitraire dans le même plan. Soient A', B' et C' les réflexions de A, B et C par rapport à O. Démontrer que

$$\frac{AB' \cdot B'C}{AB \cdot BC} + \frac{BC' \cdot C'A}{BC \cdot CA} + \frac{CA' \cdot A'B}{CA \cdot AB} \geq 1.$$

4429. *Proposé par Lorian Saceanu.*

Soient a, b et c des nombres réels positifs. Démontrer que

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2(ab + bc + ca)}} \geq \frac{a + b + c}{\sqrt{a(b + c)} + \sqrt{b(a + c)} + \sqrt{c(a + b)}}.$$

4430. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Soit $s \in \mathbb{R}$, $s \geq \frac{28}{3}$ et considérer des nombres réels a, b, c et d tels que

$$a + b + c + d = 4 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = s.$$

Déterminer la valeur maximale du produit $abcd$.