OLYMPIAD CORNER

No. 371

The problems in this section appeared in a regional or national mathematical Olympiad.

Click here to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section

To facilitate their consideration, solutions should be received by **June 15, 2019**.

Originally the problems were mislabelled. The issue has now been corrected.

OC421. Mim has a deck of 52 cards, stacked in a pile with their backs facing up. Mim separates the small pile consisting of the seven cards on the top of the deck, turns it upside down, and places it at the bottom of the deck. All cards are again in one pile, but not all of them face down; the seven cards at the bottom do, in fact, face up. Mim repeats this move until all cards have their backs facing up again. In total, how many moves did Mim make?

OC422. A 2017×2017 table is filled with nonzero digits. Among the 4034 numbers whose decimal expansion is formed with the rows and columns of this table, read from left to right and from top to bottom, respectively, all but one are divisible by a prime number p, and the remaining number is not divisible by p. Find all possible values of p.

OC423. There are 100 gnomes with weight $1, 2, \ldots, 100$ kg gathered on the left bank of the river. They cannot swim, but they have one boat with capacity 100 kg. Because of the current, it is hard to row back, so each gnome has enough power only for one passage from right side to left as oarsman. Can all gnomes get to the right bank?

OC424. Let n be a nonzero natural number, let $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ be real numbers and let $b_1, b_2, \ldots, b_n$ be real numbers. Prove that:

(a) if all the numbers b_i are positive, then there exists a polynomial f with real coefficients and having no real roots such that $f(a_i) = b_i$ for $i = 1, 2 \ldots, n$;

(b) there exists a polynomial f of degree at least 1 having all real roots and such that $f(a_i) = b_i$ for $i = 1, 2 \ldots, n$.

OC425. Consider a triangle ABC with $\angle A < \angle C$. Point E is on the internal angle bisector of $\angle B$ such that $\angle EAB = \angle ACB$. Let D be a point on line BC such that $B \in CD$ and $BD = AB$. Prove that the midpoint M of the segment AC is on the line DE.

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale.

Cliquez ici afin de soumettre vos solutions, commentaires ou généralisations aux problèmes proposés dans cette section.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **15 juin 2019**.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

OC421. Mim a devant elle un paquet de 52 cartes, dans une pile avec les versos vers le haut. Elle retire la toute petite pile de sept cartes du haut, la renverse en un mouvement et la place au fond du paquet. Les cartes sont ainsi de nouveau en une seule pile, mais les versos ne sont plus tous vers le haut; les sept cartes au fond ont leurs versos vers le bas. Mim répète la même série de déplacements, jusqu'à ce que tous les versos se retrouvent de nouveau vers le haut. Déterminer le nombre de déplacements effectués.

OC422. Un tableau 2017×2017 consiste de chiffres non nuls. Les rangées, lues de gauche à droite, et les colonnes, lues du haut vers le bas, donnent les représentations décimales de 4034 entiers. Pour un certain nombre premier p, tous ces 4034 entiers sont divisibles par p, sauf un seul. Déterminer toute valeur possible de p.

OC423. Se trouvent 100 gnomes de poids $1, 2, \dots, 100$ kg sur la rive gauche d'une rivière. Ils ne peuvent pas nager, mais ils disposent d'un bateau de capacité totale de 100 kg. Aucun gnome peut faire le passage de retour de la rive droite vers la rive gauche plus d'une fois. Est-ce possible pour tous les 100 gnomes de se rendre de la rive gauche à la rive droite ?

OC424. Soit n un nombre naturel non nul et soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ puis $b_1, b_2, \dots, b_n$ des nombres réels. Démontrer que:

(a) si tous les nombres b_i sont positifs, alors il existe un polynôme f à coefficients réels et n'ayant aucune racine réelle tel que $f(a_i) = b_i$ pour $i = 1, 2 \dots, n$;

(b) il existe un polynôme de degré au moins 1 ayant seulement des racines réelles, tel que $f(a_i) = b_i$ pour $i = 1, 2 \dots, n$.

OC425. Soit un triangle ABC tel que $\angle A < \angle C$. Le point E se trouve sur la bissectrice interne de $\angle B$ de façon à ce que $\angle EAB = \angle ACB$. Enfin, soit D un point sur la ligne BC tel que $B \in CD$ et $BD = AB$. Démontrer que le mi point M du segment AC se trouve sur la ligne DE.