PROBLEMS

Click here to submit problems proposals as well as solutions, comments and generalizations to any problem in this section.

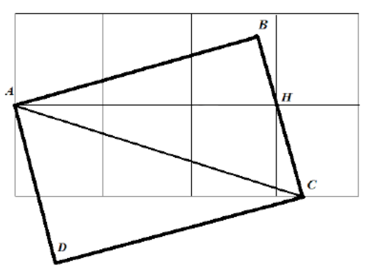
To facilitate their consideration, solutions should be received by **April 15, 2019**.

4401. *Proposed by Ruben Dario and Leonard Giugiuc.*

Let D and E be the centres of squares erected externally on the sides AB and AC, respectively, of an arbitrary triangle ABC, and define F and G to be the intersections of the line BC with lines perpendicular to ED at D and at E. Prove that the resulting segments BF and CG are congruent.

4402. *Proposed by Peter Y. Woo.*

Consider a rectangular carpet $ABCD$ lying on top of floor tiled with 8 square tiles with side length of 1 foot each (as shown in the diagram).



Suppose AH bisects $\angle BAC$. Express $\tan\angle BAH$ as the sum of a rational number and the square root of a rational number.

4403. *Proposed by Michel Bataille.*

Let m be an integer with $m > 1$. Evaluate in closed form

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k+1}\frac{k}{m+k}.$$

4404. *Proposed by Nguyen Viet Hung.*

Let x, y and z be integers such that $x > 0, z > 0$ and $x + y > 0$. Find all the solutions to the equation

$$x^4 + y^4 + (x+y)^4 = 2(z^2 + 40).$$

4405. *Proposed by Kadir Altintas and Leonard Giugiuc.*

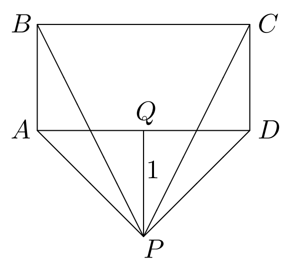
Let ABC be a triangle and let K be a point inside ABC. Suppose that BK intersects AC in F and CK intersects AB in E. Let M be the midpoint of BE, N be the midpoint of CF and suppose that MN intersects BK at P. Show that the midpoints of AF, EK and MP are collinear.

4406. *Proposed by Bill Sands.*

Four trees are situated at the corners of a rectangle. You are standing outside the rectangle, the nearest point of the rectangle being the midpoint of one of its sides, 1 metre away from you. To you in this position, the four trees appear to be equally spaced apart.

a) Find the side lengths of the rectangle, assuming that they are positive integers.

b) Suppose that the rectangle is a square. Find the length of its side.



4407. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Circle C_1 lies outside circle C_2 and is tangent to it at E. Take arbitrary points B and D different from E on the common tangent line. Let the second tangent from B to C_1 touch it at M and to C_2 touch it at N, while the second tangents from D to those circles touch them at Q and P, respectively. If the orthocenters of the triangles MNQ and PNQ are H_1 and H_2, prove that $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{MP}$.

4408. *Proposed by Leonard Giugiuc, Dan Stefan Marinescu and Daniel Sitaru.*

Let $\alpha \in (0, 1] \cup [2, \infty)$ be a real number and let a, b and c be non-negative real numbers with $a + b + c = 1$. Prove that

$$a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha + 1 \geq (a + b)^\alpha + (b + c)^\alpha + (c + a)^\alpha.$$

4409. *Proposed by Christian Chiser.*

Let A and B be two matrices in $M_2(\mathbb{R})$ such that $A^2 = O_2$ and B is invertible. Prove that the polynomial $P = \det(xB^2 - AB + BA)$ has all integer roots.

4410. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Prove that

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin 2x} dx < \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}.$$

. . . .

Cliquez ici afin de proposer de nouveaux problèmes, de même que pour offrir des solutions, commentaires ou généralisations aux problèmes proposś dans cette section.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **15 avril 2019**.

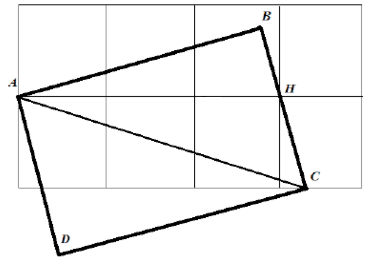
La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

4401. *Proposé par Ruben Dario et Leonard Giugiuc.*

Soient D et E les centres des carrés tracés à l'extérieur des côtés AB et AC d'un triangle arbitraire ABC et soient F et G les intersections de la ligne BC avec les perpendiculaires venant de ED, partant des points D et E, respectivement. Démontrer que les segments BF et CG sont congrus.

4402. *Proposé par Peter Y. Woo.*

Soit $ABCD$ un tapis rectangulaire, reposant sur un plancher formé de 8 tuiles carrées de côtés 1 pied de longueur chacune (comme indiqué au diagramme).



Supposons que AH bissecte $\angle BAC$. Exprimer $\tan \angle BAH$ comme somme d'un nombre rationnel et d'une racine carrée d'un nombre rationnel.

4403. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit m un entier tel que $m > 1$. Évaluer en forme close l'expression

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k+1}\frac{k}{m+k}.$$

4404. *Proposé par Nguyen Viet Hung.*

Soient x, y et z des entiers tels que $x > 0, z > 0$ et $x + y > 0$. Déterminer toutes les solutions à l'équation

$$x^4 + y^4 + (x+y)^4 = 2(z^2 + 40)$$

4405. *Proposé par Kadir Altintas et Leonard Giugiuc.*

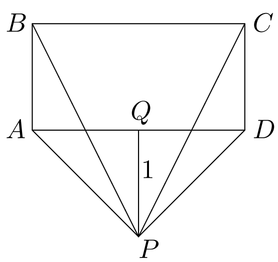
Soit ABC un triangle et K un point à son intérieur. Supposons que BK intersecte AC en F et que CK intersecte AB en E. Soient M le mi point de BE et N le mi point de CF; de plus, supposons que MN intersecte BK en P. Démontrer que les mi points de AF, EK et MP sont colinéaires.

4406. *Proposé par Bill Sands.*

Quatre arbres sont situés aux coins d'un rectangle. Vous êtes debout à l'extérieur du rectangle, le point du rectangle le plus près de vous étant le mi point d'un de ses côtés, à une distance de 1 mètre. De votre point de vue, les quatre arbres vous paraissent également espacés.

a) Déterminer les longueurs des côtés du rectangle, prenant pour acquis qu'elles sont entières et positives.

b) Supposant que le rectangle est effectivement un carré, déterminer la longueur de ses côtés.



4407. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Le cercle $C1$ se situe à l'extérieur du cercle $C2$ et lui est tangent au point E. Soient B et D deux autres points sur la tangente en commun. La deuxième tangente de B vers $C1$ le rencontre en M et la deuxième tangente vers $C2$ le rencontre en N, tandis que les deuxièmes tangentes de D vers $C1$ et $C2$ les rencontrent en Q et P respectivement. Si les orthocentres des triangles MNQ et PNQ sont $H1$ et $H2$, démontrer que $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{MP}$.

4408. *Proposé par Leonard Giugiuc, Dan Stefan Marinescu et Daniel Sitaru.*

Soit $\alpha \in (0,1] \cup [2,\infty)$ un nombre réel et soient a, b et c des nombres réels non négatifs tels que $a+b+c=1$. Démontrer que

$$a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha + 1 \geq (a+b)^\alpha + (b+c)^\alpha + (c+a)^\alpha.$$

4409. *Proposé par Christian Chiser.*

Soient A et B deux matrices dans $M_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = O_2$ et que B est inversible. Démontrer que le polynôme $P = \text{dét}(xB^2 - AB + BA)$ n'a que des racines entières.

4410. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Démontrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin 2x}dx < \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}.$$