OLYMPIAD CORNER

No. 369

The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad.

Click here to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **April 15, 2019**.

OC411. Show that for all integers $k > 1$ there is a positive integer m less than k^2 such that $2^m - m$ is divisible by k.

OC412. Find all the functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for all real numbers x, y

$$f(y - xy) = f(x)y + (x - 1)^2 f(y).$$

OC413. To each sequence consisting of n zeros and n ones is assigned a number which is the number of largest segments with the same digits in it (for example, the sequence 00111001 has 4 such segments 00, 111, 00, 1). For each n, add all the numbers assigned to each sequence. Prove that the resulting sum is equal to

$$(n + 1)\binom{2n}{n}.$$

OC414. Find all prime numbers p and all positive integers a and m such that $a \leq 5p^2$ and $(p - 1)! + a = p^m$.

OC415. Let n be a positive integer and let $f(x)$ be a polynomial of degree n with real coefficients and n distinct positive real roots. Is it possible for some natural integer $k \geq 2$ and for a real number a that the polynomial

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 4)f(x) + a$$

is the k-th power of a polynomial with real coefficients?

. . . .

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale.

Cliquez ici afin de soumettre vos solutions, commentaires ou généralisations aux problèmes proposés dans cette section.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **15 avril 2019**.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

OC411. Démontrer que pour tout entier $k > 1$ il existe un entier positif m, plus petit que k^2, tel que $2^m - m$ est divisible par k.

OC412. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(y - xy) = f(x)y + (x-1)^2 f(y)$$

pour tous nombres réels x et y.

OC413. À chaque suite comprenant n zéros et n uns on associe un nombre égal au nombre de segments utilisant un seul chiffre (par exemple, la suite 00111001 possde 4 tels segments: 00, 111, 00, 1). Pour n donné, soit la somme des nombres associés à toutes ses suites. Démontrer que cette somme est égale à

$$(n+1)\binom{2n}{n}.$$

OC414. Déterminer tous les nombres premiers p et tous les entiers a et m tels que $a \leq 5p^2$ et $(p-1)! + a = p^m$.

OC415. Soit n un entier positif et soit $f(x)$ un polynôme de degré n à coefficients réels, ayant n racines réelles distinctes et positives. Est-ce possible que pour un certain entier $k \geq 2$ et pour un certain a réel le polynôme

$$x(x+1)(x+2)(x+4)f(x) + a$$

soit la k-ième puissance dun polynôme à coefficients réels?