PROBLEMS

Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by the editor by **March 1, 2016**, *although late solutions will also be considered until a solution is published.*

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

4001. *Proposed by Cristinel Mortici and Leonard Giugiuc.*

Let $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ with $d > 2$ such that

$$(2d+1) \cdot \frac{a}{6} + \frac{b}{2} + \frac{c}{d+1} = 0.$$

Prove that there exists $t \in (0, d)$ such that $at^2 + bt + c = 0$.

4002. *Proposed by Henry Aniobi.*

Let f be a convex function on an interval I. Let $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ and $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$ be numbers such that $x_i + y_j$ is always in I for all $1 \leq i, j \leq n$. Let $z_1, z_2, \ldots, z_n$ be an arbitrary permutation of $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Show that

$$\begin{aligned} f(x_1+y_1) + \ldots + f(x_n+y_n) &\geq f(x_1+z_1) + \ldots + f(x_n+z_n) \\ &\geq f(x_1+y_n) + f(x_2+y_{n-1}) + \ldots + f(x_n+y_1); \end{aligned}$$

4003. *Proposed by Martin Lukarevski.*

Show that for any triangle ABC, the following inequality holds

$$\begin{aligned} \sin A \sin B \sin C \left(\frac{1}{\sin A + \sin B} + \frac{1}{\sin B + \sin C} + \frac{1}{\sin C + \sin A} \right) \\ \leq \frac{3}{4}(\cos A + \cos B + \cos C). \end{aligned}$$

4004. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let x, y, z be positive real numbers such that $x + y + z = 2$. Prove that

$$\frac{x^5}{yz(x^2+y^2)} + \frac{y^5}{zx(y^2+z^2)} + \frac{z^5}{xy(z^2+x^2)} \geq 1.$$

4005. *Proposed by Michel Bataille.*

Let a, b, c be the sides of a triangle with area F. Suppose that some positive real numbers x, y, z satisfy the equations

$$x + y + z = 4 \quad \text{and}$$
$$2xb^2c^2 + 2yc^2a^2 + 2za^2b^2 - \left(\frac{4 - yz}{x}\,a^4 + \frac{4 - zx}{y}\,b^4 + \frac{4 - xy}{z}\,c^4\right) = 16F^2.$$

Show that the triangle is acute and find x, y, z.

4006. *Proposed by Dragolijub Milošević.*

Let x, y, z be positive real numbers such that $xyz = 1$. Prove that

$$\frac{2}{xy + yz + zx} - \frac{1}{x + y + z} \leq \frac{1}{3}.$$

4007. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Show that for any numbers $a, b, c > 0$ such that $a^2 + b^2 + c^2 = 12$, we have

$$(a^3 + 4a + 8)(b^3 + 4b + 8)(c^3 + 4c + 8) \leq 24^3.$$

4008. *Proposed by Mehmet Şahin.*

Let ABC be a triangle with $\angle ACB = 2\alpha$, $\angle ABC = 3\alpha$, AD is an altitude and AE is a median such that $\angle DAE = \alpha$. If $|BC| = a, |CA| = b, |AB| = c$, prove that

$$\frac{a}{b} = 1 + \sqrt{2\left(\frac{c}{b}\right)^2 - 1}.$$

4009. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let m_a, m_b, m_c be the lengths of the medians of a triangle ABC. Prove that

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \leq \frac{R}{2r^2},$$

where r and R are inradius and circumradius of ABC, respectively.

4010. *Proposed by Ovidiu Furdui.*

Let $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Calculate

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)^{2n} f(x)\mathrm{d}x.$$

. . . .

4001. *Proposé par Cristinel Mortici et Leonard Giugiuc.*

Soit a, b, c et d des réels, avec $d > 2$, tels que

$$(2d+1) \cdot \frac{a}{6} + \frac{b}{2} + \frac{c}{d+1} = 0.$$

Démontrer qu'il existe un nombre t, $t \in (0, d)$, tel que $at^2 + bt + c = 0$.

4002. *Proposé par Henry Aniobi.*

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des nombres tels que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$ et $x_i + y_j$ est toujours sur I pour tous i et j avec $1 \leq i, j \leq n$. Soit $z_1, z_2, \ldots, z_n$ une permutation quelconque de $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Démontrer que

$$\begin{aligned} f(x_1+y_1) + \cdots + f(x_n+y_n) &\geq f(x_1+z_1) + \cdots + f(x_n+z_n) \\ &\geq f(x_1+y_n) + f(x_2+y_{n-1}) + \cdots + f(x_n+y_1) \end{aligned}$$

et que les inégalités sont renversées lorsque f est concave.

4003. *Proposé par Martin Lukarevski.*

Démontrer que pour n'importe quel triangle ABC, on a toujours

$$\begin{aligned} \sin A \sin B \sin C &\left(\frac{1}{\sin A + \sin B} + \frac{1}{\sin B + \sin C} + \frac{1}{\sin C + \sin A} \right) \\ &\leq \frac{3}{4}(\cos A + \cos B + \cos C). \end{aligned}$$

4004. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soit x, y, z des réels strictement positifs tels que $x + y + z = 2$. Démontrer que

$$\frac{x^5}{yz(x^2+y^2)} + \frac{y^5}{zx(y^2+z^2)} + \frac{z^5}{xy(z^2+x^2)} \geq 1.$$

4005. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle et F l'aire du triangle. Soit x, y, z des réels strictement positifs qui vérifient les équations

$$x + y + z = 4 \quad \text{et}$$

$$2xb^2c^2 + 2yc^2a^2 + 2za^2b^2 - \left(\frac{4-yz}{x}\, a^4 + \frac{4-zx}{y}\, b^4 + \frac{4-xy}{z}\, c^4 \right) = 16F^2.$$

Démontrer que le triangle est acutangle et déterminer x, y, z.

4006. *Proposé par Dragolijub Milošević.*

Soit x, y, z des réels positifs tels que $xyz = 1$. Démontrer que

$$\frac{2}{xy+yz+zx} - \frac{1}{x+y+z} \leq \frac{1}{3}.$$

4007. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit a, b, c des réels strictement positifs tels que $a^2+b^2+c^2 = 12$. Démontrer que

$$(a^3+4a+8)(b^3+4b+8)(c^3+4c+8) \leq 24^3.$$

4008. *Proposé par Mehmet Şahin.*

Soit ABC un triangle avec $\angle ACB = 2\alpha$ et $\angle ABC = 3\alpha$. La hauteur AD et la médiane AE sont telles que $\angle DAE = \alpha$. Sachant que $|BC| = a, |CA| = b$ et $|AB| = c$, démontrer que

$$\frac{a}{b} = 1 + \sqrt{2\left(\frac{c}{b}\right)^2 - 1}.$$

4009. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soit m_a, m_b, m_c les longueurs des médianes d'un triangle ABC. Démontrer que

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{R}{2r^2},$$

r étant le rayon du cercle inscrit dans le triangle et R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle.

4010. *Proposé par Ovidiu Furdui.*

Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)^{2n} f(x)\mathrm{d}x.$$