THE OLYMPIAD CORNER

No. 329

Carmen Bruni

The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by the editor by **March 1, 2016**, *although late solutions will also be considered until a solution is published.*

The editor thanks Rolland Gaudet, de l'Université Saint-Boniface à Winnipeg, for translations of the problems.

OC211. Find the maximum value of

$$|a^2 - bc + 1| + |b^2 - ac + 1| + |c^2 - ba + 1|$$

where a, b, c are real numbers in the interval $[-2, 2]$.

OC212. Let $ABCDE$ be a pentagon inscribed in a circle (O). Let $BE \cap AD = T$. Suppose the line parallel to CD which passes through T cuts AB and CE at X and Y, respectively. If ω be the circumcircle of triangle AXY, prove that ω is tangent to (O).

OC213. Suppose $p > 3$ is a prime number and

$$S = \sum_{2 \le i < j < k \le p-1} ijk.$$

Prove that $S + 1$ is divisible by p.

OC214. Let ABC be an acute-angled triangle with $AC \neq BC$, let O be the circumcentre and F the foot of the altitude through C. Furthermore, let X and Y be the feet of the perpendiculars dropped from A and B respectively to (the extension of) CO. The line FO intersects the circumcircle of FXY a second time at P. Prove that $OP < OF$.

OC215. Let $n > 1$ be an integer. The first n primes are $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots, p_n$. Set $A = p_1^{p_1} p_2^{p_2} \ldots p_n^{p_n}$. Find all positive integers x, such that $\frac{A}{x}$ is even, and $\frac{A}{x}$ has exactly x divisors.

. . . .

OC211. Déterminer la valeur maximale de

$$|a^2 - bc + 1| + |b^2 - ac + 1| + |c^2 - ba + 1|$$

où a, b, c sont des nombres réels dans l'intervalle $[-2, 2]$.

OC212. Soit $ABCDE$ un pentagone inscrit dans un cercle (O). Soit $BE \cap AD = T$. Supposons que la ligne parallèle à CD et passant par T intersecte AB et CE aux points X et Y. Si ω est le cercle circonscrit du triangle AXY, démontrer que ω est tangent à (O).

OC213. Supposons $p > 3$ un nombre premier et soit

$$S = \sum_{2 \leq i < j < k \leq p-1} ijk.$$

Démontrer que $S + 1$ est divisible par p.

OC214. Soit ABC un triangle aigu tel que $AC \neq BC$, soit O le centre du cercle circonscrit et soit F le pied de l'altitude passant par C. De plus, soient X et Y les pieds des perpendiculaires de A et B (respectivement) vers CO et son prolongement. La ligne FO intersecte le cercle circonscrit de FXY en un deuxième point P. Démontrer que $OP < OF$.

OC215. Soit $n > 1$ entier et soient les n premiers nombres premiers $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots, p_n$. Posons $A = p_1^{p_1} p_2^{p_2} \ldots p_n^{p_n}$. Déterminer tous les entiers positifs x tels que $\frac{A}{x}$ est entier et $\frac{A}{x}$ possède exactement x diviseurs.