

# THE OLYMPIAD CORNER

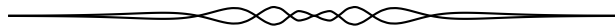
No. 329

Carmen Bruni

*The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.*

*To facilitate their consideration, solutions should be received by the editor by **March 1, 2016**, although late solutions will also be considered until a solution is published.*

*The editor thanks Rolland Gaudet, de l'Université Saint-Boniface à Winnipeg, for translations of the problems.*



**OC211.** Find the maximum value of

$$|a^2 - bc + 1| + |b^2 - ac + 1| + |c^2 - ba + 1|$$

where  $a, b, c$  are real numbers in the interval  $[-2, 2]$ .

**OC212.** Let  $ABCDE$  be a pentagon inscribed in a circle ( $O$ ). Let  $BE \cap AD = T$ . Suppose the line parallel to  $CD$  which passes through  $T$  cuts  $AB$  and  $CE$  at  $X$  and  $Y$ , respectively. If  $\omega$  be the circumcircle of triangle  $AXY$ , prove that  $\omega$  is tangent to ( $O$ ).

**OC213.** Suppose  $p > 3$  is a prime number and

$$S = \sum_{2 \leq i < j < k \leq p-1} ijk.$$

Prove that  $S + 1$  is divisible by  $p$ .

**OC214.** Let  $ABC$  be an acute-angled triangle with  $AC \neq BC$ , let  $O$  be the circumcentre and  $F$  the foot of the altitude through  $C$ . Furthermore, let  $X$  and  $Y$  be the feet of the perpendiculars dropped from  $A$  and  $B$  respectively to (the extension of)  $CO$ . The line  $FO$  intersects the circumcircle of  $FXY$  a second time at  $P$ . Prove that  $OP < OF$ .

**OC215.** Let  $n > 1$  be an integer. The first  $n$  primes are  $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_n$ . Set  $A = p_1^{p_1} p_2^{p_2} \dots p_n^{p_n}$ . Find all positive integers  $x$ , such that  $\frac{A}{x}$  is even, and  $\frac{A}{x}$  has exactly  $x$  divisors.

.....

**OC211.** Déterminer la valeur maximale de

$$|a^2 - bc + 1| + |b^2 - ac + 1| + |c^2 - ba + 1|$$

où  $a, b, c$  sont des nombres réels dans l'intervalle  $[-2, 2]$ .

**OC212.** Soit  $ABCDE$  un pentagone inscrit dans un cercle  $(O)$ . Soit  $BE \cap AD = T$ . Supposons que la ligne parallèle à  $CD$  et passant par  $T$  intersecte  $AB$  et  $CE$  aux points  $X$  et  $Y$ . Si  $\omega$  est le cercle circonscrit du triangle  $AXY$ , démontrer que  $\omega$  est tangent à  $(O)$ .

**OC213.** Supposons  $p > 3$  un nombre premier et soit

$$S = \sum_{2 \leq i < j < k \leq p-1} ijk.$$

Démontrer que  $S + 1$  est divisible par  $p$ .

**OC214.** Soit  $ABC$  un triangle aigu tel que  $AC \neq BC$ , soit  $O$  le centre du cercle circonscrit et soit  $F$  le pied de l'altitude passant par  $C$ . De plus, soient  $X$  et  $Y$  les pieds des perpendiculaires de  $A$  et  $B$  (respectivement) vers  $CO$  et son prolongement. La ligne  $FO$  intersecte le cercle circonscrit de  $FXY$  en un deuxième point  $P$ . Démontrer que  $OP < OF$ .

**OC215.** Soit  $n > 1$  entier et soient les  $n$  premiers nombres premiers  $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_n$ . Posons  $A = p_1^{p_1} p_2^{p_2} \dots p_n^{p_n}$ . Déterminer tous les entiers positifs  $x$  tels que  $\frac{A}{x}$  est entier et  $\frac{A}{x}$  possède exactement  $x$  diviseurs.

