THE CONTEST CORNER

No. 31

Robert Bilinski

The problems featured in this section have appeared in, or have been inspired by, a mathematics contest question at either the high school or the undergraduate level. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by the editor by **March 1, 2016***, although late solutions will also be considered until a solution is published.*

CC134. (*Correction*). Let two tangent lines from the point $M(1,1)$ to the graph of $y = k/x$, $k < 0$ touch the graph at the points A and B. Suppose that the triangle MAB is an equilateral triangle. Find its area and the value of constant k.

CC151. Consider a non-zero integer n such that $n(n+2013)$ is a perfect square.

a) Show that n cannot be prime.

b) Find a value of n such that $n(n+2013)$ is a perfect square.

CC152. A square of an $n \times n$ chessboard with $n \geq 5$ is coloured in black and white in such a way that three adjacent squares in either a line, a column or a diagonal are not all the same colour. Show that for any 3×3 square inside the chessboard, two of the squares in the corners are coloured white and the two others are coloured black.

CC153. A sequence $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ of positive integers is constructed as follows:

- if the last digit of a_n is less than or equal to 5, then this digit is deleted and a_{n+1} is the number consisting of the remaining digits; if a_{n+1} contains no digits, the process stops;
- otherwise, $a_{n+1} = 9a_n$.

Can one choose a_0 so that we can obtain an infinite sequence?

CC154. The numbers $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2012}$ are written on the blackboard. Alice chooses any two numbers from the blackboard, say x and y, erases them and instead writes the number $x + y + xy$. She continues to do so until there is only one number left on the board. What are the possible values of the final number?

CC155. Find all real solutions x to the equation $[x^2 - 2x] + 2[x] = [x]^2$. Here $[a]$ denotes the largest integer less than or equal to a.

. . . .

CC134. (*Correction*). Deux droites, issues du point $M(1, 1)$, sont tangentes à la courbe d'équation $y = k/x$ $(k < 0)$ aux points A et B. Sachant que le triangle MAB est équilatéral, déterminer la valeur de k et l'aire du triangle.

CC151. Considérer un entier naturel non-nul n tel que $n(n + 2013)$ soit un carré parfait.

a) Montrer que n ne peut pas être nombre premier.

b) Trouver une valeur de n tel que $n(n + 2013)$ soit un carré parfait.

CC152. Les cases d'un échiquier $n \times n$, avec $n \geq 5$, sont coloriées en noir ou en blanc de telle sorte que trois cases adjacentes sur une ligne, une colonne ou une diagonale ne soient pas de la même couleur. Montrer que pour tout carré 3×3 à l'intérieur de l'échiquier, deux de ses cases situées aux coins sont de couleur blanche et les deux autres sont de couleur noire.

CC153. Une suite d'entiers positifs de terme général a_n et de premier terme a_0 est définie pour tout entier naturel n de la façon suivante:

- si le dernier chiffre de a_n est inférieur ou égal a 5, alors ce chiffre est supprimé et les chiffres restants forment le terme a_{n+1}; si a_{n+1} ne contient pas de chiffre, le procédé s'arrête;
- autrement, $a_{n+1} = 9a_n$.

Peut-on choisir un entier naturel a_0 de sorte que la suite (a_n) soit infinie?

CC154. On a écrit les nombres $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2012}$ sur un tableau. Michèle en choisit deux, notés x et y, puis elle les efface et les remplace par le nombre $x+y+xy$. Elle continue ainsi jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul nombre sur le tableau. Quelles sont les valeurs possibles de ce nombre?

CC155. Déterminer tous les nombres réels x tels que $[x^2 - 2x] + 2[x] = [x]^2$. Ici $[a]$ désigne le plus grand nombre entier inférieur ou égal à a.