PROBLEMS

Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines in side the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by the editor by **January 1, 2016**, *although late solutions will also be considered until a solution is published.*

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

An asterisk ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

3981. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero.*

Let a, b, c be three positive numbers such that $ab+bc+ca = 6abc$. For all positive integers $n \geq 2$, show that

$$\frac{bc}{a^n(b+c)} + \frac{ca}{b^n(c+a)} + \frac{ab}{c^n(a+b)} \geq 3 \cdot 2^{n-2}.$$

3982. *Proposed by Michel Bataille.*

Let $n \in \mathbb{N}$, $u > 0$ and for $k = 0, 1, \ldots, n-1$, let a_k be such that $0 < a_k \leq \sinh(u)$. Prove that if $x \geq e^u$, then

$$a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2}a_1 x + (-1)^{n-1}a_0 < \frac{x^n}{2}.$$

3983. *Proposed by Marcel Chiriţă.*

Find all differentiable functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$xf(x) - yf(y) = (x^2 - y^2) \max\left(f'(x), f'(y)\right)$$

for all real numbers x, y.

3984. *Proposed by Dragoljub Milošević.*

Let ABC be any right-angled triangle with $\angle C = 90^\circ$. Let w_a be the length of the internal bisector of $\angle A$ from A to the side BC; define w_b similarly. If $[ABC]$ is the area of ABC, prove that

$$w_a w_b \geq 4[ABC](2-\sqrt{2}).$$

3985. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Prove that if a, b, c are positive numbers with sum of 18, then

$$\frac{a}{b^2+36} + \frac{b}{c^2+36} + \frac{c}{a^2+36} \geq \frac{1}{4}.$$

Copyright © Canadian Mathematical Society, 2015

3986. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let a, b, c be the lengths of the sides of a triangle ABC with circumradius R. Prove that
$$\frac{1}{(a+b)(b+c)}+\frac{1}{(b+c)(c+a)}+\frac{1}{(c+a)(a+b)} \geq \frac{1}{4R^2}.$$

3987. *Proposed by Michel Bataille.*

Let ABC be a triangle with circumcircle Γ and let A' be the point of Γ diametrically opposite to A. The lines AB and AC intersect the tangent to Γ at A' in B' and C', respectively. Prove that the tangents to Γ at B and C intersect at the centroid of $AB'C'$ if and only if $2\cos A = 3\sin B \sin C$.

3988*. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let a, b, c be positive real numbers. Find the maximum and minimum values of the expression
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+3b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+3c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+3a^2}}.$$

3989. *Proposed by Dragoljub Milošević.*

Let h_a, h_b and h_c be the altitudes, r_a, r_b and r_c be the exradii, r the inradius and R the circumradius of a triangle. Prove that
$$\frac{r_a^2}{h_a}+\frac{r_b^2}{h_b}+\frac{r_c^2}{h_c} \geq 3(2R-r).$$

3990. *Proposed by Ángel Plaza.*

Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be positive real numbers such that $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$. Prove that
$$(a_1-a_n)\left(\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}-a_n}\right) \geq (n-1)^2.$$
When does equality hold?

. . . .

3981. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero.*

Soit a, b, c trois réels strictement positifs tels que $ab+bc+ca = 6abc$. Démontrer que pour tout entier n, $n \geq 2$,
$$\frac{bc}{a^n(b+c)}+\frac{ca}{b^n(c+a)}+\frac{ab}{c^n(a+b)} \geq 3\cdot 2^{n-2}.$$

3982. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u > 0$. Pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$, soit a_k tel que $0 < a_k \leq \sinh(u)$. Démontrer que si $x \geq e^u$, alors

$$a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2}a_1x + (-1)^{n-1}a_0 < \frac{x^n}{2}.$$

3983. *Proposé par Marcel Chiriţă.*

Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$xf(x) - yf(y) = (x^2 - y^2)\max\left(f'(x), f'(y)\right)$$

pour tous réels x, y.

3984. *Proposé par Dragoljub Milošević.*

On considère un triangle ABC rectangle en C. Soit w_a la longueur de la bissectrice de l'angle A, du sommet A jusqu'au côté opposé BC. On définit w_b de façon semblable. Si $[ABC]$ représente l'aire du triangle ABC, démontrer que

$$w_a w_b \geq 4[ABC](2 - \sqrt{2}).$$

3985. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit a, b, c trois nombres strictement positifs ayant une somme de 18. Démontrer que

$$\frac{a}{b^2 + 36} + \frac{b}{c^2 + 36} + \frac{c}{a^2 + 36} \geq \frac{1}{4}.$$

3986. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soit a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle ABC et soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle. Démontrer que

$$\frac{1}{(a+b)(b+c)} + \frac{1}{(b+c)(c+a)} + \frac{1}{(c+a)(a+b)} \geq \frac{1}{4R^2}.$$

3987. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit et A' le point de Γ qui est diamétralement opposé à A. La tangente à Γ au point A' est coupée par les droites AB et AC aux points respectifs B' et C'. Démontrer que les tangentes à Γ aux points B et C se coupent au centre de gravité du triangle $AB'C'$ si et seulement si $2\cos A = 3\sin B \sin C$.

Copyright © Canadian Mathematical Society, 2015

3988*. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soit a, b, c des réels strictement positifs. Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de l'expression

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+3b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+3c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+3a^2}}.$$

3989. *Proposé par Dragoljub Milošević.*

Soit h_a, h_b et h_c les hauteurs d'un triangle, r le rayon du cercle inscrit dans le triangle, R le rayon du cercle circonscrit au triangle et r_a, r_b et r_c les rayons des cercles exinscrits du triangle. Démontrer que

$$\frac{r_a^2}{h_a}+\frac{r_b^2}{h_b}+\frac{r_c^2}{h_c}\geq 3(2R-r).$$

3990. *Proposé par Ángel Plaza.*

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs tels que $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$. Démontrer que

$$(a_1-a_n)\left(\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}-a_n}\right)\geq (n-1)^2.$$

Quand y a-t-il égalité?