# THE OLYMPIAD CORNER

No. 327

Nicolae Strungaru and Carmen Bruni

*The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.*

*To facilitate their consideration, solutions should be received by the editor by* **January 1, 2016**, *although late solutions will also be considered until a solution is published.*

*The editor thanks Rolland Gaudet, of l'Université Saint-Boniface in Winnipeg, for translations of the problems.*

**OC201**. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $f(0) \in \mathbb{Q}$ and

$$f(x + f(y)^2) = f(x + y)^2.$$

**OC202**. Let $a, b$ be real numbers such that the equation $x^3 - ax^2 + bx - a = 0$ has three positive real roots . Find the minimum of $\frac{2a^3-3ab+3a}{b+1}$.

**OC203**. Find all positive integers $m$ and $n$ satisfying $2^n + n = m!$.

**OC204**. Let $ABC$ be a triangle. Find all points $P$ on segment $BC$ satisfying the following property: if $X$ and $Y$ are the intersections of line $PA$ with the common external tangent lines of the circumcircles of triangles $PAB$ and $PAC$, then

$$\left(\frac{PA}{XY}\right)^2 + \frac{PB \cdot PC}{AB \cdot AC} = 1.$$

**OC205**. For each positive integer $n$ determine the maximum number of points in space creating the set $A$ which has the following properties:

1. the coordinates of every point from the set $A$ are integers from the range $[0, n]$;
2. for each pair of different points $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$ belonging to the set $A$ at least one of the following inequalities $x_1 < y_1, x_2 < y_2, x_3 < y_3$ is satisfied and at least one of the following inequalities $x_1 > y_1, x_2 > y_2, x_3 > y_3$ is satisfied.

**OC201**. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(0) \in \mathbb{Q}$ et

$$f(x + f(y)^2) = f(x + y)^2.$$

**OC202**. Soient $a$ et $b$ des nombres réels tels que l'équation $x^3 - ax^2 + bx - a = 0$ possède trois racines réelles positives. Déterminer le minimum de $\frac{2a^3 - 3ab + 3a}{b+1}$.

**OC203**. Déterminer tous les entiers positifs $m$ et $n$ tels que $2^n + n = m!$.

**OC204**. Soit $ABC$ un triangle. Déterminer tous les points $P$ sur le segment $BC$ ayant la propriété suivante : si $X$ et $Y$ sont les intersections de la ligne $PA$ avec les tangentes externes communes des cercles circonscrits des triangles $PAB$ et $PAC$, alors

$$\left(\frac{PA}{XY}\right)^2 + \frac{PB \cdot PC}{AB \cdot AC} = 1.$$

**OC205**. Pour tout entier positif $n$, déterminer le nombre maximum de points dans l'espace formant un ensemble $A$ ayant les propriétés suivantes :

1. les coordonnes de tout point dans l'ensemble $A$ sont des entiers dans $[0, n]$ ;
2. pour toute paire de points distincts dans $A$, $(x_1, x_2, x_3)$ et $(y_1, y_2, y_3)$, au moins une des inégalités $x_1 < y_1, x_2 < y_2, x_3 < y_3$ est satisfaite et au moins une des inégalités $x_1 > y_1, x_2 > y_2, x_3 > y_3$ est satisfaite.