THE CONTEST CORNER

No. 29

Robert Bilinski

The problems featured in this section have appeared in, or have been inspired by, a mathematics contest question at either the high school or the undergraduate level. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by the editor by **January 1, 2016**, *although late solutions will also be considered until a solution is published.*

CC141. Alice writes down 100 consecutive natural numbers. Bob multiplies 50 of them: 25 smallest ones and 25 largest ones. He then multiplies the remaining 50 numbers. Can the sum of the two products be equal to $100! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100$?

CC142. Roboto writes down a number. Every minute, he increases the existing number by double of the number of its natural divisors (including 1 and itself). For example, if he started with 5, the sequence would be $5, 9, 15, 23, \ldots$. What is the maximum number of perfect squares that appears on the board within 24 hours?

CC143. Summer Camp has attracted 300 students this year. On the first day, the students discovered (as mathematicians would) that the number of triples of students who mutually know each other is greater than the number of pairs of students who know each other. Prove that there is a student who knows at least 5 other students.

CC144. Year 2013 is the first one since Middle Ages that uses 4 consecutive digits in its base 10 representation. How many other years like this will there be before year 10,000?

CC145. Can a natural number be divisible by all numbers between 1 and 500 except for some two consecutive ones? If so, find these two numbers (show all possible cases).

CC141. Arianne choisit 100 nombres naturels consécutifs. Bernard multiplie 50 d'entre eux, les 25 plus petits et les 25 plus gros. Ensuite, il multiplie les 50 autres. Est-ce que la somme de ces deux produits peut être égale à $100! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100$?

CC142. Ramses écrit un nombre au tableau. À chaque minute, il en écrit un autre, égal au nombre précédent auquel il ajoute le double de son nombre de diviseurs naturels (incluant 1 et soi-même). À titre d'exemple, si le premier nombre est 5, la suite serait $5, 9, 15, 23, \ldots$. Quel est le nombre maximum de carrés parfaits qui pourraient apparatre au tableau dans les 24 premières heures?

CC143. Un camp d'été a attiré 300 élèves à esprit mathématique. Le premier jour, ils ont constaté que le nombre de triplets d'élèves à connaissance mutuelle dépassait le nombre de couples d'élèves à connaissance mutuelle. Démontrer qu'il existe un élève qui connait au moins 5 autres élèves.

CC144. L'année 2013 est la première depuis le moyen âge dont la représentation en base 10 utilise 4 chiffres consécutifs. Combien d'autres telles années y aura-t-il avant l'année 10 000?

CC145. Est-ce qu'un nombre naturel peut être divisible par tous les entiers de 1 à 500, sauf pour deux entiers consécutifs? Si oui, déterminer ces deux entiers, en fournissant tous les cas possibles.