PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er janvier 2016***; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, de l'Université Saint-Boniface à Winnipeg, d'avoir traduit les problèmes.

3991. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit ABC un triangle tel que $BC = a, CA = b, AB = c, \angle BAC = \alpha, \angle CBA = \beta, \angle ACB = \gamma$ et soient $m_a = AA', m_b = BB', m_c = CC'$ où A', B', C' sont les mi points de BC, CA, AB. Démontrer que

$$\frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geq \frac{3(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}.$$

3992. *Proposé par Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Soient α, a, b, c des nombres réels positifs tels que $a+b+c+3 = 6abc$. Déterminer la valeur maximale de

$$\frac{1}{a^\alpha + b^\alpha + 1} + \frac{1}{b^\alpha + c^\alpha + 1} + \frac{1}{c^\alpha + a^\alpha + 1}.$$

3993. *Proposé par Dragoljub Milošević.*

Soient h_a, h_b et h_c les altitudes d'un triangle et soit r le rayon de son cercle inscrit. Démontrer que

$$\frac{h_a - 2r}{h_a + 2r} + \frac{h_b - 2r}{h_b + 2r} + \frac{h_c - 2r}{h_c + 2r} \geq \frac{3}{5}.$$

3994. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soient a, b, c des nombres réels positifs tels que $a + b + c = 1$. Démontrer que

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc.$$

3995. *Proposé par Michel Bataille.*

Pour x et y positifs, posons $\mathcal{M}_0(x,y) = \sqrt{xy}$ et $\mathcal{M}_\alpha(x,y) = \left(\frac{x^\alpha+y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ où α est un nombre réel non nul. Étant donné un triangle équilatéral ABC, déterminer pour quelles valeurs de α la propriété suivante tient: $\mathcal{M}_\alpha(PB,PC) \le PA$ pour tout point P sur la ligne BC distinct de B et C.

3996. *Proposé par Marcel Chiriţă.*

Soit $a \in (1,\infty)$ et $b, c \in \mathbb{R}$. Déterminer toute fonction différentiable $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(a^{\lambda^2 x}) + 2f(a^{\lambda x}) + f(a^x) = bx + c$$

pour tout $\lambda \in (0,\infty)$ et $x \in [1,\infty)$.

3997. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soient a, b, c des nombres positifs dont le produit est 8. Démontrer que

$$\frac{a^4+b^4}{c^3} + \frac{a^4+c^4}{b^3} + \frac{b^4+c^4}{a^3} \ge 64\left(\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} + \frac{1}{c^5}\right) + 6.$$

3998. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soient a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ des nombres réels positifs tels que $\sum_{i=1}^n a_i = n$. Démontrer que

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i^3+1}{a_i^2+1}\right)^4 \ge n.$$

3999. *Proposé par Leonard Giugiuc et Diana Trailescu.*

Soient a, b, c des nombres réels tels que $a \ge 1 \ge b \ge c > -3$ et

$$ab + bc + ca = 3.$$

Démontrer que $a + b + c \ge 3$.

4000. *Proposé par Marcel Chiriţă.*

Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ tels que $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > 0$ puis $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$ où $n \ge 3$. Démontrer que

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1-x_2} \cdot \frac{x_2^2+x_3^2}{x_2-x_3} \cdots \frac{x_{n-1}^2+x_n^2}{x_{n-1}-x_n} \cdot \frac{x_1^2+x_n^2}{x_1-x_n} > 2^{3/n}.$$

. . . .

3991. *Proposed by Michel Bataille.*

Let ABC be a triangle with $BC = a, CA = b, AB = c, \angle BAC = \alpha, \angle CBA = \beta, \angle ACB = \gamma$ and let $m_a = AA', m_b = BB', m_c = CC'$ where A', B', C' are the midpoints of BC, CA, AB. Prove that

$$\frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geq \frac{3(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}.$$

3992. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Let α, a, b, c be positive real numbers such that $a + b + c + 3 = 6abc$. Find the maximum value of the expression

$$\frac{1}{a^\alpha + b^\alpha + 1} + \frac{1}{b^\alpha + c^\alpha + 1} + \frac{1}{c^\alpha + a^\alpha + 1}.$$

3993. *Proposed by Dragoljub Milošević.*

Let h_a, h_b and h_c be the altitudes and r the inradius of a triangle. Prove that

$$\frac{h_a - 2r}{h_a + 2r} + \frac{h_b - 2r}{h_b + 2r} + \frac{h_c - 2r}{h_c + 2r} \geq \frac{3}{5}.$$

3994. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let a, b, c be positive real numbers with $a + b + c = 1$. Prove that

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc.$$

3995. *Proposed by Michel Bataille.*

For positive x and y, let $\mathcal{M}_0(x, y) = \sqrt{xy}$ and $\mathcal{M}_\alpha(x, y) = \left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ if α is a nonzero real number. Given an equilateral triangle ABC, determine for which values of α the following property holds: $\mathcal{M}_\alpha(PB, PC) \leq PA$ for every point P distinct from B and C on the line BC.

3996. *Proposed by Marcel Chiriţă.*

Let $a \in (1, \infty)$ and $b, c \in \mathbb{R}$. Find all differentiable functions $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ such that

$$f(a^{\lambda^2 x}) + 2f(a^{\lambda x}) + f(a^x) = bx + c$$

for all $\lambda \in (0, \infty)$ and $x \in [1, \infty)$.

3997. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let a, b, c be positive numbers with product 8. Prove that

$$\frac{a^4+b^4}{c^3}+\frac{a^4+c^4}{b^3}+\frac{b^4+c^4}{a^3} \geq 64\left(\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}+\frac{1}{c^5}\right)+6.$$

3998. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let a_i, $i=1,2,\ldots,n$ be positive real numbers such that $\sum_{i=1}^n a_i = n$. Prove that

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^3+1}{a_i^2+1}\right)^4 \geq n.$$

3999. *Proposed by Leonard Giugiuc and Diana Trailescu.*

Consider real numbers a, b, c such that $a \geq 1 \geq b \geq c > -3$ and

$$ab+bc+ca=3.$$

Prove that $a+b+c \geq 3$.

4000. *Proposed by Marcel Chiriţă.*

Let $x_1, x_2, \ldots x_n$ with $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > 0$, $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$ and $n \geq 3$. Show that

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1-x_2}\cdot\frac{x_2^2+x_3^2}{x_2-x_3}\cdots\frac{x_{n-1}^2+x_n^2}{x_{n-1}-x_n}\cdot\frac{x_1^2+x_n^2}{x_1-x_n} > 2^{3/n}.$$