THE OLYMPIAD CORNER

No. 328

Nicolae Strungaru and Carmen Bruni

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er janvier 2016** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, de l'Université Saint-Boniface à Winnipeg, d'avoir traduit les problèmes.

OC206. Deux cercles K_1 et K_2, de rayons différents, intersectent aux points A et B. Soient C et D deux points sur K_1 et K_2 respectivement, tels que A est le mipoint du segment CD. Le prolongement de DB rencontre K_1 à un second point E et le prolongement de CB rencontre K_2 à un second point F. Soient l_1 et l_2 les bissectrices perpendiculaires de CD et EF respectivement.

1. Démontrer que l_1 et l_2 ont un point commun unique, dénoté P.
2. Démontrer que les longueurs CA, AP et PE sont les longueurs d'un triangle rectangle.

OC207. Déterminer toutes les fonctions injectives $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$.

OC208. Déterminer toutes les valeurs x non entières telles que

$$x + \frac{13}{x} = \lfloor x \rfloor + \frac{13}{\lfloor x \rfloor}$$

où $\lfloor x \rfloor$ dénote le plus grand entier n plus petit ou égal à x.

OC209. La séquence $a_1, a_2, \ldots, a_n$ consiste des nombres $1, 2, \ldots, n$ dans un certain ordre. Pour quels entiers positifs n est-il possible que les $n + 1$ nombres $0, a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ont tous des restes différents lorsqu'ils sont divisés par $n + 1$?

OC210. Déterminer tous les entiers positifs a tels que pour tout entier $n \geq 5$, on a $2^n - n^2 \mid a^n - n^a$.

. . . .

OC206. Two circles K_1 and K_2 of different radii intersect at two points A and B. Let C and D be two points on K_1 and K_2, respectively, such that A is the midpoint of the segment CD. The extension of DB meets K_1 at another point E, the extension of CB meets K_2 at another point F. Let l_1 and l_2 be the perpendicular bisectors of CD and EF, respectively.

1. Show that l_1 and l_2 have a unique common point (denoted by P).
2. Prove that the lengths of CA, AP and PE are the side lengths of a right triangle.

OC207. Find all injective functions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ that satisfy:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

for any $x, y \in \mathbb{Z}$.

OC208. Find all non-integers x such that

$$x + \frac{13}{x} = \lfloor x \rfloor + \frac{13}{\lfloor x \rfloor}$$

where $\lfloor x \rfloor$ means the greatest integer n less than or equal to x.

OC209. The sequence $a_1, a_2, \ldots, a_n$ consists of the numbers $1, 2, \ldots, n$ in some order. For which positive integers n is it possible that the $n+1$ numbers $0, a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ all have different remainders when divided by $n + 1$?

OC210. Find all positive integers a such that for any positive integer $n \geq 5$ we have $2^n - n^2 \mid a^n - n^a$.