PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. Nous préférons les réponses électroniques et demandons aux lecteurs de présenter chaque solution dans un fichier distinct. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante : Nom de famille_Prénom_Numéro du problème *(exemple : Tremblay_Julie_1234.tex). De préférence, les lecteurs enverront un fichier au format LaTeX et un fichier pdf pour chaque solution, bien que les autres formats (Word, etc.) soient aussi acceptés. Nous invitons les lecteurs à envoyer leurs solutions au rédacteur à l'adresse* `crux-redacteurs@smc.math.ca`*. Nous acceptons aussi les contributions par la poste, envoyées à l'adresse figurant en troisième de couverture. Le nom de la personne qui propose une solution doit figurer avec chaque solution, de même que l'tablissement qu'elle fréquente, sa ville et son pays; chaque solution doit également commencer sur une nouvelle page. Un astérisque* ($\star$) *signale un problème proposé sans solution.*

Nous sommes surtout à la recherche de problèmes originaux, mais d'autres problèmes intéressants peuvent aussi être acceptables pourvu qu'ils ne soient pas trop connus et que leur provenance soit indiquée. Normalement, si l'on connaît l'auteur d'un problème, on ne doit pas le proposer sans lui en demander la permission. Les solutions connues doivent accompagner les problèmes proposés. Si la solution n'est pas connue, la personne qui propose le problème doit tenter de justifier l'existence d'une solution. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante : Nom de famille_Prénom_Proposition_Année_numéro *(exemple : Tremblay_Julie_Proposition_2014_4.tex, s'il s'agit du 4e problème proposé par Julie en 2014).*

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er juin 2014***; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

Chaque problème est présenté en anglais et en français, les deux langues officielles du Canada. Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le français précédera l'anglais. Dans la section Solutions, le problème sera écrit dans la langue de la première solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier, de l'Université de Montréal d'avoir traduit les problèmes.

3793. *Correction. Proposé par George Apostolopoulos, Messolonghi, Grèce.*

Soit a, b et c trois nombres réels positifs tels que

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1007\sqrt{2}\ .$$

Trouver la valeur minimale de l'expression

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\ .$$

3811. *Proposé par Jung In Lee, Seoul Science High School, Seoul, Republic of Korea.*

Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telles que, pour tous les entiers positifs a et b, $af(a+b)+bf(a)+b^2$ soit un carré parfait.

3812. *Proposé par George Apostolopoulos, Messolonghi, Grèce.*

Soit $ABCD$ un parallélogramme et P un point sur le côté BC. Soit respectivement K, L et M les centres de gravité des triangles PAB, PAD et PCD. Montrer que

$$[AKL] + [DLM] = [BKMC],$$

où $[\cdot]$ représente l'aire.

3813. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Trouver la plus petite constante C telle que l'inégalité

$$(a^7 + b^7 + c^7)^6 \leq C(a^6 + b^6 + c^6)^7$$

soit valide pour tous les nombres réels a, b, c tels que $a + b + c = 0$.

3814. *Proposé par Marcel Chiriţă, Bucarest, Roumanie.*

Montrer que pour tout nombre x dans l'intervalle fermé $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$, il existe un point M dans le plan du carré $ABCD$ tel que

$$x = \frac{AM + MC}{BM + MD}.$$

3815. *Proposé par Paolo Perfetti, Département de Mathématiques, Université de Rome, "Tor Vergata", Rome, Italie.*

Montrer que $x^x \leq x^2 - x + 1$ pour tous les x avec $0 \leq x \leq 1$.

3816. *Proposé par Mehmet Şahin, Ankara, Turquie.*

Soit ABC un triangle rectangle avec l'angle droit en C, et soit D le pied de la hauteur issue de C. Soit respectivement I_1 et I_2 les centres des cercles inscrits des triangles CAD et CBD. Soit ρ et r les rayons de ceux des triangles I_1DI_2 et ABC. Montrer que

$$\frac{\rho}{r} \leq \frac{1}{2 + \sqrt{2}}.$$

3817. *Proposé par Tigran Hakobyan, Yerevan State University, Yerevan, Armenia.*

Soit $a, b \in \mathbb{N}$ avec $\gcd(a, b) = 1$. Soit $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ l'ensemble des nombres premiers dans la progression $\{ak + b\}_{k=0}^{\infty}$. On considère

$$\alpha = 0.p_1p_2p_3 \cdots,$$

où les chiffres des nombres premiers $p_1, p_2, p_3, \ldots$, placés côte à côte, forment les décimales de α. Montrer que α est irrationnel.

3818. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Soit a, b, c trois nombres réels positifs tels que $abc = 1$. Montrer que

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4}{a+b} + \frac{(\sqrt{b}+\sqrt{c})^4}{b+c} + \frac{(\sqrt{c}+\sqrt{a})^4}{c+a} \geq 24.$$

3819. *Proposé par Francisco Javier García Capitán, IES Álvarez Cubero, Priego de Córdoba, Espagne.*

Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et I celui de son cercle inscrit. Soit ℓ une perpendiculaire quelconque à OI. Montrer que pour tout point P sur ℓ, situé à l'intérieur du triangle, la somme des distances de P aux côtés de ABC est constante.

3820. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Montrer que

$$\frac{2x}{\sinh(2\tanh x)} < (\cosh x)^2 < \frac{2x}{\sinh(2\tanh x)} + x\sinh(2x)$$

pour tout réel x non nul.

. . . .

3793. *Correction. Proposed by George Apostolopoulos, Messolonghi, Greece.*

Let a, b, and c be positive real numbers such that

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = 1007\sqrt{2}\ .$$

Find the minimum value of the expression

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\ .$$

3811. *Proposed by Jung In Lee, Seoul Science High School, Seoul, Republic of Korea.*

Determine all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for all positive integers a and b, $af(a+b) + bf(a) + b^2$ is a perfect square.

3812. *Proposed by George Apostolopoulos, Messolonghi, Greece.*

Let $ABCD$ be a parallelogram and P be a point on side BC. Let K, L, and M be the centroids of triangles PAB, PAD and PCD, respectively. Prove that

$$[AKL] + [DLM] = [BKMC],$$

where $[\cdot]$ represents the area.

3813. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Find the smallest constant C such that the inequality

$$(a^7 + b^7 + c^7)^6 \leq C(a^6 + b^6 + c^6)^7$$

holds for all real numbers a, b, c such that $a + b + c = 0$.

3814. *Proposed by Marcel Chiriţă, Bucharest, Romania.*

Prove that for any number x in the closed interval $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$, there exists a point M in the plane of the square $ABCD$ such that

$$x = \frac{AM + MC}{BM + MD}.$$

3815. *Proposed by Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata Roma, Rome, Italy.*

Show that $x^x \leq x^2 - x + 1$ for all $0 \leq x \leq 1$.

3816. *Proposed by Mehmet Şahin, Ankara, Turkey.*

Let ABC be a right triangle with right angle at C, and let D be the foot of the altitude from C. Let I_1 and I_2 be the incentres of triangles CAD and CBD, respectively. Let ρ and r be the inradii of triangles I_1DI_2 and ABC, respectively. Prove that

$$\frac{\rho}{r} \leq \frac{1}{2 + \sqrt{2}}.$$

3817. *Proposed by Tigran Hakobyan, Yerevan State University, Yerevan, Armenia.*

Let $a, b \in \mathbb{N}$ with $\gcd(a, b) = 1$. Let $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ be the set of primes in the progression $\{ak + b\}_{k=0}^{\infty}$. Consider

$$\alpha = 0.p_1p_2p_3 \cdots ,$$

where the digits of the prime numbers $p_1, p_2, p_3, \ldots$ placed side by side form the digits of α. Prove that α is irrational.

3818. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Let a, b, c be positive real numbers such that $abc = 1$. Prove that

$$\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^4}{a + b} + \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{c})^4}{b + c} + \frac{(\sqrt{c} + \sqrt{a})^4}{c + a} \geq 24.$$

3819. *Proposed by Francisco Javier García Capitán, IES Álvarez Cubero, Priego de Córdoba, Spain.*

Let ABC be a triangle with circumcentre O and incentre I. Let ℓ be any line that is perpendicular to OI. Prove that for any point P on ℓ that is inside the triangle, the sum of the distances from P to the sides of ABC is constant.

3820. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Prove that

$$\frac{2x}{\sinh(2\tanh x)} < (\cosh x)^2 < \frac{2x}{\sinh(2\tanh x)} + x\sinh(2x)$$

for all nonzero real x.

SOLUTIONS

No problem is ever permanently closed. The editor is always pleased to consider for publication new solutions or new insights on past problems.

3676. [2011 : 454, 456] *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let a, b, and c be the sides of a triangle with semiperimeter s, inradius r and circumradius R. Let r' and R' be the inradius and circumradius of a triangle with sides $\sqrt{a(s-a)}$, $\sqrt{b(s-b)}$, and $\sqrt{c(s-c)}$. Prove that

$$Rr' \;\geq\; R'r\,.$$

I. Solution by the proposer.

Let $a' = \sqrt{a(s-a)}$, $b' = \sqrt{b(s-b)}$, and $c' = \sqrt{c(s-c)}$. An easy calculation gives the following useful equality:

$$b'^2 + c'^2 - a'^2 = b(s-b) + c(s-c) - a(s-a) = 2(s-b)(s-c)\,. \qquad (1)$$

From (1), we have $a'^2 - b'^2 - c'^2 < 0 < 2b'c'$, and so consequently, $a' < b' + c'$. In a similar way, $b' < c' + a'$ and $c' < a' + b'$ and so triangles with sides a', b', c' do exist. Let $A'B'C'$ be such a triangle and let A', B', and C' be the angles opposite a', b', and c', respectively. Then using the law of cosines together with (1), the following equality is obtained:

$$\cos A' = \frac{2(s-b)(s-c)}{2\sqrt{bc(s-b)(s-c)}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = \sin\frac{A}{2}\,. \qquad (2)$$