THE OLYMPIAD CORNER

No. 310

Nicolae Strungaru

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. Nous préférons les réponses électroniques et demandons aux lecteurs de présenter chaque solution dans un fichier distinct. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante : Nom de famille_Prénom_OCNuméro du problème *(exemple : Tremblay_Julie_OC1234.tex). De préférence, les lecteurs enverront un fichier au format LaTeX et un fichier pdf pour chaque solution, bien que les autres formats (Word, etc.) soient aussi acceptés. Nous invitons les lecteurs à envoyer leurs solutions et réponses aux concours au rédacteur à l'adresse* `crux-olympiad@smc.math.ca`*. Nous acceptons aussi les contributions par la poste, envoyées à l'adresse figurant en troisième de couverture. Le nom de la personne qui propose une solution doit figurer avec chaque solution, de même que l'établissement qu'elle fréquente, sa ville et son pays ; chaque solution doit également commencer sur une nouvelle page.*

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er juin 2014** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

Chaque problème est présenté en anglais et en français, les deux langues officielles du Canada. Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le français précédera l'anglais. Dans la section Solutions, le problème sera écrit dans la langue de la première solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, de l'Université Saint-Boniface à Winnipeg, d'avoir traduit les problèmes.

OC116. Déterminer tous les entiers positifs n qui sont égaux à 300 fois la somme de leurs positions décimales.

OC117. Déterminer le plus petit entier positif m tel que pour tout nombre premier $p > 3$ on a

$$105 \mid 9^{p^2} - 29^p + m\,.$$

OC118. Déterminer toutes les fonctions $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

$$f(x) + f(y) \leq \frac{f(x+y)}{2} \quad \text{et} \quad \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} \geq \frac{f(x+y)}{x+y}\,,$$

pour tout $x, y \in (0, \infty)$.

OC119. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et P le point dintersection des droites AC et BD. Supposons que $AC + AD = BC + BD$. Démontrez que les bissectrices des angles internes de $\angle ACB$, $\angle ADB$ et $\angle APB$ se coupent en un point.

OC120. Soit $S_r(n) = 1^r + 2^r + \cdots + n^r$ où n est un entier positif et r est un nombre rationnel. Le triplet (a, b, c) est dit élégant si a et b sont des nombres rationnels positifs, c est un entier positif et

$$S_a(n) = (S_b(n))^c$$

pour tout entier positif n. Déterminer tous les triplets élégants.

. . . .

OC116. Find all positive integers n which are 300 times the sum of their digits.

OC117. Find the smallest positive integer m such that for all prime numbers $p > 3$,

$$105 \mid 9^{p^2} - 29^p + m\,.$$

OC118. Find all functions $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfying

$$f(x) + f(y) \le \frac{f(x+y)}{2} \quad \text{and} \quad \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} \ge \frac{f(x+y)}{x+y}\,,$$

for all $x, y \in (0, \infty)$.

OC119. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral and let P be the point of intersection of AC and BD. Suppose that $AC + AD = BC + BD$. Prove that the internal angle bisectors of $\angle ACB, \angle ADB$ and $\angle APB$ meet at a common point.

OC120. Let $S_r(n) = 1^r + 2^r + \cdots + n^r$ where n is a positive integer and r is a rational number. (a, b, c) is called a nice triple if a, b are positive rationals, c is a positive integer and

$$S_a(n) = (S_b(n))^c$$

for all positive integers n. Find all nice triples.

OLYMPIAD SOLUTIONS

OC56. Suppose that $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is a function so that for all $a, b \in \mathbb{N}$ the expression $af(a) + bf(b) + 2ab$ is a perfect square. Prove that $f(a) = a$ for all $a \in \mathbb{N}$.
(*Originally question 3 from Iran Team Selection Test, Day 4, 2011.*)