THE CONTEST CORNER

No. 8

Shawn Godin

The Contest Corner *est une nouvelle rubrique offerte pas* ***Crux Mathematicorum****, comblant ainsi le vide suite à la mutation en 2013 de* Mathematical Mayhem *et* Skoliad *vers une nouvelle revue en ligne. Il s'agira d'un amalgame de* Skoliad, The Olympiad Corner *et l'ancien* Academy Corner *d'il y a plusieurs années. Les problèmes en vedette seront tirés de concours destinés aux écoles secondaires et au premier cycle universitaire ; les lecteurs seront invités à soumettre leurs solutions ; ces solutions commenceront à paraître au prochain numéro.*

Les solutions peuvent être envoyées à : Shawn Godin, Cairine Wilson S.S., 975 Orleans Blvd., Orleans, ON, CANADA, K1C 2Z5 *ou par couriel à* `crux-contest@cms.math.ca`.

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1 février 2014**.

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, de Université de Saint-Boniface, Winnipeg, MB, d'avoir traduit les problèmes.

CC36. Pour chaque entier positif n, définissons $f(n)$ comme étant le plus petit entier positif s tel que $1+2+3+\cdots+(s-1)+s$ est divisible par n. Par exemple, $f(5)=4$ car $1+2+3+4$ est divisible par 5, tandis qu'aucun de 1, $1+2$, puis $1+2+3$ est divisible par 5. Déterminer, avec preuve, la plus petite valeur positive entière k pour laquelle l'équation $f(c)=f(c+k)$ possède au moins une solution positive entière impaire c.

CC37. $ABCD$ est un quadrilatère cyclique avec $AD=d$, d étant le diamètre du cercle. Soit aussi $AB=a$, $BC=a$ et $CD=b$. Si a, b et d sont des entiers tels que $a\neq b$,

(a) démontrer que d ne peut pas être un nombre premier ;

(b) déterminer la valeur minimale de d.

CC38. Chaque sommet d'un polygone régulier à 11 côtés est coloré soit noir soit or. Tous les triangles possibles sont formés à partir de ces sommets. Démontrer qu'il existe deux triangles congrus à sommets colorés noir ou qu'il existe deux triangles congrus à sommets colorés or.

CC39. Charles s'amuse avec une variante du Sudoku. À chaque point du treillis (x, y) tel que $1 \leq x, y < n$, il assigne un entier entre 1 et n, (inclusivement), où n. est un entier positif. Ces entiers doivent satisfaire la propriété que dans la rangée où $y = k$, les $n - 1$ entiers sont distincts et ne peuvent pas égaler k ; les colonnes doivent respecter un principe analogue. Maintenant, Charles choisit un des points du treillis, la probabilité du choix étant proportionnelle à l'entier qu'il y a assigné. Calculer la valeur espérée de $x + y$ pour le point choisi (x, y).

CC40. Définissons $P(1) = P(2) = 1$ et $P(n) = P(P(n-1)) + P(n - P(n-1))$ pour $n \geq 3$. Démontrer que $P(2n) \leq 2P(n)$ pour tout entier positif n.

. . . .

CC36. For each positive integer n, define $f(n)$ to be the smallest positive integer s for which $1 + 2 + 3 + \cdots + (s-1) + s$ is divisible by n. For example, $f(5) = 4$ because $1 + 2 + 3 + 4$ is divisible by 5 and none of 1, $1 + 2$, or $1 + 2 + 3$ is divisible by 5. Determine, with proof, the smallest positive integer k for which the equation $f(c) = f(c + k)$ has an odd positive integer solution for c.

CC37. $ABCD$ is a cyclic quadrilateral with side $AD = d$, where d is the diameter of the circle. $AB = a$, $BC = a$ and $CD = b$. If a, b and d are integers $a \neq b$,

(a) prove that d cannot be a prime number.

(b) determine the minimum value of d.

CC38. Each vertex of a regular 11-gon is coloured black or gold. All possible triangles are formed using these vertices. Prove that there are either two congruent triangles with three black vertices or two congruent triangles with three gold vertices.

CC39. Charles is playing a variant of Sudoku. To each lattice point (x, y) where $1 \leq x, y < n$, he assigns an integer between 1 and n, inclusive, for some positive integer n. These integers satisfy the property that in any row where $y = k$, the $n - 1$ values are distinct and are never equal to k; similarly for any column where $x = k$. Now, Charles randomly selects one of his lattice points with probability proportional to the integer value he assigned to it. Compute the expected value of $x + y$ for the chosen point (x, y).

CC40. Define $P(1) = P(2) = 1$ and $P(n) = P(P(n-1)) + P(n - P(n-1))$ for $n \geq 3$. Prove that $P(2n) \leq 2P(n)$ for all positive integers n.