PROBLEMS

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1 août 2013**. *Une étoile* ($\star$) *après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5, 7, et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8, et 10, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier, de l'Université de Montréal et Rolland Gaudet, de Université de Saint-Boniface, Winnipeg, MB, d'avoir traduit les problèmes.

3711. *Proposé par Mehmet Sahin, Ankara, Turquie.*

Soit ABC un triangle rectangle avec $\angle A = 90^\circ$. Soit AD une hauteur et supposons que la bissectrice de $\angle B$ coupe AD en K. Si $\angle ACK = 2\angle DCK$ montrer que $KC = 2AD$.

3712. *Proposé par Johan Gunardi, étudiant, SMPK 4 BPK PENABUR, Jakarta, Indonésie.*

Montrer que pour trois nombres réels positifs arbitraires a, b, c, on a

$$\sqrt{\frac{a(a^2+bc)}{b+c}} + \sqrt{\frac{b(b^2+ca)}{c+a}} + \sqrt{\frac{c(c^2+ab)}{a+b}} \geq a+b+c.$$

3713. *Proposé par D. M. Bătineţu, Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, École secondaire George Emil Palade, Buzău, Roumanie.*

Calculer

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!c_n}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{(2n-1)!!e_n}}\right),$$

où $e_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et $c_n = -\ln n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, pour tout entier positif n.

3714. *Proposé par Panagiote Ligouras, École Secondaire Léonard de Vinci, Noci, Italie.*

Dans un triangle donné ABC on choisit respectivement les points B_1 sur le côté AB et C_1 sur le côté AC tels que $B_1C_1 \parallel BC$, les points C_2 et A_2 sur les côtés BC et BA de sorte que $C_2A_2 \parallel CA$, les points A_3 et B_3 sur CA et CB de sorte que $A_3B_3 \parallel AB$. De plus, notons A_i', B_i', C_i' A_i, B_i, C_i les projections de A_i, B_i, C_i sur les côtés parallèles correspondants du triangle (pour former trois rectangles, tels $B_1B_1'C_1'C_1$).

(a) Montrer que si les rapports des aires de chacun des triangles définis à celles de son rectangle adjacent sont égaux, à savoir

$$\frac{[AB_1C_1]}{[B_1B_1'C_1'C_1]} = \frac{[BC_2A_2]}{[C_2C_2'A_2'A_2]} = \frac{[CA_3B_3]}{[A_3A_3'B_3'B_3]},$$

alors les rayons des cercles inscrits de ces trois triangles sont aussi égaux.

b) Trouver le rapport du rayon du cercle inscrit du triangle formé par les droites C_1B_1, A_2C_2, B_3A_3 au rayon du cercle inscrit du ΔABC.

3715. *Proposé par Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbie.*

Soit h_a, h_b, h_c les hauteurs d'un triangle, r_a, r_b, r_c les rayons des cercles extérieurement tangents, r le rayon du cercle inscrit et R celui du cercle circonscrit. Montrer que

$$\frac{h_a^2}{r_a} + \frac{h_b^2}{r_b} + \frac{h_c^2}{r_c} \geq 4r\left(2 - \frac{r}{R}\right)^2.$$

3716. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Etant donné trois entiers positifs a, u_1, u_2, on définit u_n via la récursion

$$u_{n+2} = 2au_{n+1} + u_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Montrer qu'il existe un nombre réel positif r tel que

$$u_{n+2^{k+1}} = \lfloor 1 + r^{2^k} \rfloor \cdot u_{n+2^k} - u_n$$

pour tous les entiers positifs n, k.

3717. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Déterminer toutes les solutions réelles $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ au système d'équations

$$\begin{aligned} x_1 &= \exp\left[\sin\left(x_2 - \sqrt{1 - \ln^2 x_1}\right)\right] \\ x_2 &= \exp\left[\sin\left(x_3 - \sqrt{1 - \ln^2 x_2}\right)\right] \\ &\vdots \\ x_n &= \exp\left[\sin\left(x_1 - \sqrt{1 - \ln^2 x_n}\right)\right]. \end{aligned}$$

3718. *Proposé par George Apostolopoulos, Messolonghi, Grèce.*

Soient a, b et c des nombres réels tels que $a > b > c$ et $b + c = 503$.

(i) Déterminer la valeur minimale de

$$A = \frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c}.$$

(ii) Déterminer des valeurs de a, b, c telles que A attaint sa valeur minimale.

3719. *Proposé par Johan Gunardi, étudiant, SMPK 4 BPK PENABUR, Jakarta, Indonésie.*

Démontrer que pour tous nombres réels a, b, c, l'inégalité suivante tient

$$\sqrt{\frac{a(a^2+bc)}{b+c}} + \sqrt{\frac{b(b^2+ca)}{c+a}} + \sqrt{\frac{c(c^2+ab)}{a+b}} \geq a+b+c.$$

3720. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit ABC un triangle tel que $\angle BAC = 90^\circ$, soit O le mipoint de BC et soit H le pied de l'altitude émanant de A. Enfin, soit K sur le segment AH, tel que $\angle BKC = 135^\circ$ et soit L tel que $AHCL$ est un rectangle. Démontrer que $OL = OB + KH$.

....

3711. *Proposed by Mehmet Sahin, Ankara, Turkey.*

Let ABC be a right triangle with $\angle A = 90^\circ$. Let AD be an altitude, and let the angle bisector of $\angle B$ meet AD in K. If $\angle ACK = 2\angle DCK$ then prove that $KC = 2AD$.

3712. *Proposed by Johan Gunardi, student, SMPK 4 BPK PENABUR, Jakarta, Indonesia.*

Prove that for any positive real numbers a, b, c

$$\sqrt{\frac{a(a^2+bc)}{b+c}} + \sqrt{\frac{b(b^2+ca)}{c+a}} + \sqrt{\frac{c(c^2+ab)}{a+b}} \geq a+b+c.$$

3713. *Proposed by D. M. Bătineţu, Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, George Emil Palade Secondary School, Buzău, Romania.*

Compute

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!c_n}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{(2n-1)!!e_n}}\right),$$

where $e_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ and $c_n = -\ln n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, for any positive integer n.

3714. *Proposed by Panagiote Ligouras, Leonardo da Vinci High School, Noci, Italy.*

Given a triangle ABC define points B_1 on side AB and C_1 on AC so that $B_1C_1 \parallel BC$; similarly take C_2 and A_2 on sides BC and BA with $C_2A_2 \parallel CA$, and A_3, B_3 on CA, CB with $A_3B_3 \parallel AB$. Furthermore, denote A_i', B_i', C_i' the projections of A_i, B_i, C_i onto the corresponding parallel sides of the given triangle (to form three rectangles such as $B_1B_1'C_1'C_1$).

(a) Prove that if the ratios of the areas of each defined triangle to that of its adjacent rectangle are equal, namely

$$\frac{[AB_1C_1]}{[B_1B_1'C_1'C_1]} = \frac{[BC_2A_2]}{[C_2C_2'A_2'A_2]} = \frac{[CA_3B_3]}{[A_3A_3'B_3'B_3]},$$

then the inradii of those three triangles are also equal.

(b) Determine the ratio of the inradius of the triangle formed by the lines C_1B_1, A_2C_2, B_3A_3 to the inradius of ΔABC.

3715. *Proposed by Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbia.*

Let h_a, h_b, h_c be the altitudes, r_a, r_b, r_c the exradii, r the inradius and R the circumradius of a triangle. Prove that

$$\frac{h_a^2}{r_a} + \frac{h_b^2}{r_b} + \frac{h_c^2}{r_c} \geq 4r\left(2 - \frac{r}{R}\right)^2.$$

3716. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Given positive integers a, u_1, u_2 let u_n be defined by the recursion

$$u_{n+2} = 2au_{n+1} + u_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Show that there exists a positive real number r such that

$$u_{n+2^{k+1}} = \lfloor 1 + r^{2^k} \rfloor \cdot u_{n+2^k} - u_n$$

for all positive integers n, k.

3717. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Find all real solutions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ of the system of equations

$$\begin{aligned}
x_1 &= \exp\left[\sin\left(x_2 - \sqrt{1 - \ln^2 x_1}\right)\right] \\
x_2 &= \exp\left[\sin\left(x_3 - \sqrt{1 - \ln^2 x_2}\right)\right] \\
&\vdots \\
x_n &= \exp\left[\sin\left(x_1 - \sqrt{1 - \ln^2 x_n}\right)\right].
\end{aligned}$$

3718. *Proposed by George Apostolopoulos, Messolonghi, Greece.*

Let a, b and c be real number such that $a > b > c$ and $b + c = 503$.

(i) Find the minimum value of the expression

$$A = \frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c}.$$

(ii) Determine values of a, b, c for which A attains its minimum value.

3719. *Proposed by Johan Gunardi, student, SMPK 4 BPK PENABUR, Jakarta, Indonesia.*

Prove that for any positive real numbers a, b, c,

$$\sqrt{\frac{a(a^2+bc)}{b+c}} + \sqrt{\frac{b(b^2+ca)}{c+a}} + \sqrt{\frac{c(c^2+ab)}{a+b}} \geq a+b+c.$$

3720. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let ABC be a triangle with $\angle BAC = 90^\circ$, O be the midpoint of BC and H be the foot of the altitude from A. Let K, on segment AH, be such that $\angle BKC = 135^\circ$ and L be such that $AHCL$ is a rectangle. Show that $OL = OB + KH$.