PROBLEMS

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1 juin 2014**. *Une étoile* ($\star$) *après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5, 7, et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8, et 10, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier, de l'Université de Montréal, et Rolland Gaudet, de Université de Saint-Boniface, Winnipeg, MB, d'avoir traduit les problèmes.

3791. *Proposé par John Lander Leonard, Université de l'Arizona, Tucson, AZ.*

Les nombres de 0 à 12 sont répartis au hazard autour d'un cercle.

(a) Montrer qu'il doit exister un groupe de trois nombres adjacents dont la somme vaut au moins 18.

(b) Trouver le n maximal tel qu'il doit exister un groupe de trois nombres adjacents dont la somme vaut au moins n.

3792. *Proposé par Marcel Chiriţă, Bucharest, Romania.*

Résoudre le système suivant

$$\begin{aligned} 2^x + 2^6 &= 12 \\ 3^x + 3^y &= 36 \end{aligned}$$

for $x, y \in \mathbb{R}$.

3793. *Proposé par George Apostolopoulos, Messolonghi, Grèce.*

Soit a, b et c trois nombres réels positifs tels que

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1007\sqrt{2}\ .$$

Trouver la valeur maximale de l'expression

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}\ .$$

3794. *Proposé par Václav Konečný, Big Rapids, MI, É-U.*

Soit ABC un triangle acutangle inscrit dans un cercle Γ, et soit A' et B' les pieds des hauteurs respectives issues de A et B. Soit respectivement P_A et P_B les deuxièmes intersections des cercles de diamètre BA' et CB' avec Γ. Déterminer l'angle entre les droites AP_A et BP_B.

3795. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Soit a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle ABC de hauteurs h_a, h_b, h_c et de rayon circonscrit R. Montrer que

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(R+\frac{h_a+h_b+h_c}{6}\right)>3\ .$$

3796. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^{\binom{2n}{2k-1}}}{(2k+1)^{\binom{2n}{2k}}}=1\ .$$

3797. *Proposé par Panagiote Ligouras, École Secondaire Léonard de Vinci, Noci, Italie.*

Soit m_a, m_b et m_c les médianes et k_a, k_b et k_c les symédianes d'un triangle ABC. Si n est un entier positif, montrer que

$$\left(\frac{m_a}{k_a}\right)^n+\left(\frac{m_b}{k_b}\right)^n+\left(\frac{m_c}{k_c}\right)^n\geq 3\ .$$

3798. *Proposé par Albert Stadler, Herrliberg, Suisse.*

Soit n un entier non négatif. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{\infty}k^n\left(k+1-\frac{1}{k!}\int_1^{\infty}e^{-t}t^{k+1}dt\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{S(n,k)}{k+2},$$

où l'on pose $k^n=1$ pour $k=n=0$ et $S(n,k)$ sont les nombres de Stirling de seconde espèce, définis par la récurrence

$$S(n,m)=S(n-1,m-1)+mS(n-1,m),S(n,0)=\delta_{0,n},S(n,n)=1,$$

pour $n,m\geq 0$. A noter que $S(n,m)=0$ quand $m>n$.
[*Ed* : A noter, ceci est la version corrigée du problème 3687.]

3799. *Proposé par Constantin Mateescu, "Zinca Golescu" Collège National, Pitesti, Roumanie.*

Soit respectivement R, r et s le rayon du cercle circonscrit, celui du cercle inscrit et le semi-périmètre d'un triangle ABC pour lequel on dénote $K=\sum_{\text{cyclique}}\sin\frac{A}{2}$.
Montrer que

$$s^2=4R(K-1)^2\left[R(K+1)^2+r\right]\ .$$

3800. *Proposé par Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Roumanie.*

Soit $n \geq 2$ un entier. Calculer

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x} - e^{-y}}{x - y}\right)^n dxdy \ .$$

. . . .

3791. *Proposed by John Lander Leonard, University of Arizona, Tucson, AZ.*

The numbers 0 through 12 are randomly arranged around a circle.

(a) Show that there must exist a trio of three adjacent numbers which sum to at least 18.

(b) Determine the maximum n such that there must exist a trio of three adjacent numbers which sum to at least n.

3792. *Proposed by Marcel Chiriţă, Bucharest, Romania.*

Solve the following system

$$\begin{aligned} 2^x + 2^6 &= 12 \\ 3^x + 3^y &= 36 \end{aligned}$$

for $x, y \in \mathbb{R}$.

3793. *Proposed by George Apostolopoulos, Messolonghi, Greece.*

Let a, b, and c be positive real numbers such that

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1007\sqrt{2} \ .$$

Find the maximum value of the expression

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \ .$$

3794. *Proposed by Václav Konečný, Big Rapids, MI, USA.*

Let an acute triangle ABC be inscribed in the circle Γ, and A' and B' be the feet of the altitudes from A and B respectively. Let the circle on diameter BA' intersect Γ again at P_A, and the circle on diameter CB' intersect Γ again at P_B. Determine the angle between the lines AP_A and BP_B.

3795. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Let a, b, c be the lengths of the sides of a triangle ABC with altitudes h_a, h_b, h_c and circumradius R. Prove that

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(R + \frac{h_a + h_b + h_c}{6}\right) > 3 \ .$$

3796. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Show that

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^{\binom{2n}{2k-1}}}{(2k+1)^{\binom{2n}{2k}}}=1\ .$$

3797. *Proposed by Panagiote Ligouras, Leonardo da Vinci High School, Noci, Italy.*

Let m_a, m_b, m_c be the medians and k_a, k_b, k_c be the symmedians of a triangle ABC. If n is a positive integer, prove that

$$\left(\frac{m_a}{k_a}\right)^n+\left(\frac{m_b}{k_b}\right)^n+\left(\frac{m_c}{k_c}\right)^n\geq 3\ .$$

3798. *Proposed by Albert Stadler, Herrliberg, Switzerland.*

Let n be a nonnegative integer. Prove that

$$\sum_{k=0}^{\infty}k^n\left(k+1-\frac{1}{k!}\int_1^{\infty}e^{-t}t^{k+1}dt\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{S(n,k)}{k+2},$$

where k^n is taken to be 1 for $k=n=0$ and $S(n,k)$ are the Stirling numbers of the second kind that are defined by the recursion

$$S(n,m)=S(n-1,m-1)+mS(n-1,m),S(n,0)=\delta_{0,n},S(n,n)=1,$$

for $n,m\geq 0$. Note also that $S(n,m)=0$ when $m>n$.
[*Ed: Note, this is the corrected version of problem 3687.*]

3799. *Proposed by Constantin Mateescu, "Zinca Golescu" National College, Pitesti, Romania.*

Let ABC be a triangle with circumradius R, inradius r and semiperimeter s for which we denote $K=\sum_{\text{cyclic}}\sin\frac{A}{2}$. Prove that

$$s^2=4R(K-1)^2\left[R(K+1)^2+r\right]\ .$$

3800. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.*

Let $n\geq 2$ be an integer. Calculate

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-x}-e^{-y}}{x-y}\right)^n dxdy\ .$$