

THE CONTEST CORNER

No. 10

Shawn Godin

The Contest Corner est une nouvelle rubrique offerte par *CruX Mathematicorum*, comblant ainsi le vide suite à la mutation en 2013 de Mathematical Mayhem et Skoliad vers une nouvelle revue en ligne. Il s'agira d'un amalgame de Skoliad, The Olympiad Corner et l'ancien Academy Corner d'il y a plusieurs années. Les problèmes en vedette seront tirés de concours destinés aux écoles secondaires et au premier cycle universitaire; les lecteurs seront invités à soumettre leurs solutions; ces solutions commenceront à paraître au prochain numéro.

Les solutions peuvent être envoyées à : Shawn Godin, Cairine Wilson S.S., 975 Orleans Blvd., Orleans, ON, CANADA, K1C 2Z5 ou par courriel à cruX-contest@cms.math.ca.

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1 avril 2014**.

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier André Ladouceur, Ottawa, ON, d'avoir traduit les problèmes.

CC46. Si on place l'entrée (m, n) dans la machine A , on obtient la sortie (n, m) . Si on place l'entrée (m, n) dans la machine B , on obtient la sortie $(m + 3n, n)$. Si on place l'entrée (m, n) dans la machine C , on obtient la sortie $(m - 2n, n)$. Nathalie choisit le couple $(0, 1)$ et le place comme entrée dans une des machines. Elle prend ensuite la sortie et la place comme entrée dans n'importe quelle des machines. Elle continue de la sorte en prenant la sortie à chaque fois et en la plaçant comme entrée dans n'importe quelle des machines. (Par exemple, elle peut commencer par le couple $(0, 1)$ et utiliser successivement les machines B , B , A , C et B pour obtenir la sortie finale $(7, 6)$.) Est-il possible de commencer par le couple $(0, 1)$ et d'obtenir la sortie $(20132013, 20142014)$ en utilisant les machines dans n'importe quel ordre n'importe quel nombre de fois?

CC47. Un cercle de rayon 2 est tangent aux deux côtés d'un angle. Un cercle de rayon 3 est tangent au premier cercle et aux deux côtés de l'angle. Un troisième cercle est tangent au deuxième cercle et aux deux côtés de l'angle. Déterminer le rayon du troisième cercle.

CC48. Déterminer s'il existe deux nombres réels a et b de manière que les deux polynômes $(x - a)^3 + (x - b)^2 + x$ et $(x - b)^3 + (x - a)^2 + x$ n'admettent que des zéros réels.

CC49. On a placé une pièce de monnaie sur certaines des 100 cases d'un quadrillage 10×10 . Chaque case est à côté d'une case case qui contient une pièce de monnaie. Déterminer le nombre minimum de pièces de monnaie qui ont pu être placées. (On dit que deux cases distinctes sont à côté l'une de l'autre si elles ont un côté commun.)

CC50. On considère des entiers positifs de cinq chiffres ou moins. Démontrer que la racine carrée d'un tel entier ne peut avoir une approximation décimale qui commence par 0,1111, mais qu'il existe un entier de huit chiffres dont l'approximation décimale commence par 0,1111.

.....

CC46. Starting with the input (m, n) , Machine A gives the output (n, m) . Starting with the input (m, n) , Machine B gives the output $(m + 3n, n)$. Starting with the input (m, n) , Machine C gives the output $(m - 2n, n)$. Natalie starts with the pair $(0, 1)$ and inputs it into one of the machines. She takes the output and inputs it into any one of the machines. She continues to take the output that she receives and inputs it into any one of the machines. (For example, starting with $(0, 1)$, she could use machines B, B, A, C, B in that order to obtain the output $(7, 6)$.) Is it possible for her to obtain $(20132013, 20142014)$ after repeating this process any number of times?

CC47. A circle of radius 2 is tangent to both sides of an angle. A circle of radius 3 is tangent to the first circle and both sides of the angle. A third circle is tangent to the second circle and both sides of the angle. Find the radius of the third circle.

CC48. Determine whether there exist two real numbers a and b such that both $(x - a)^3 + (x - b)^2 + x$ and $(x - b)^3 + (x - a)^2 + x$ contain only real roots.

CC49. Coins are placed on some of the 100 squares in a 10×10 grid. Every square is next to another square with a coin. Find the minimum possible number of coins. (We say that two squares are next to each other when they share a common edge but are not equal).

CC50. Show that the square root of a natural number of five or fewer digits never has a decimal part starting 0.1111, but that there is an eight-digit number with this property.

