MATHEMATICAL MAYHEM

Mathematical Mayhem began in 1988 as **a Mathematical Journal for and by High School and University Students**. It continues, with the same emphasis, as an integral part of ***Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem***.

The Mayhem Editor is Ian VanderBurgh (University of Waterloo). The other staff members are Monika Khbeis (Ascension of Our Lord Secondary School, Mississauga) and Eric Robert (Leo Hayes High School, Fredericton).

Mayhem Problems

Please send your solutions to the problems in this edition by **15 November 2009**. *Solutions received after this date will only be considered if there is time before publication of the solutions.*

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, and 7, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, and 8, French will precede English.

Each of the following Mayhem problems is specially dedicated to the memory of Jim Totten, hence the special numbering used below. The numbering of the regular Mayhem problems will resume in subsequent issues.

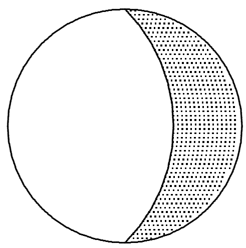
The editor thanks Jean-Marc Terrier of the University of Montreal for translations of the problems.

Totten–M1. *Proposed by Shawn Godin, Cairine Wilson Secondary School, Orleans, ON.*

Ancient Egyptians wrote all fractions in terms of distinct unit fractions (that is, in terms of distinct fractions with numerators of 1). For example, instead of writing $\frac{11}{12}$, they would write $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$. The unit fraction $\frac{1}{2}$ can be written in terms of other unit fractions as $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. Find an infinite family of unit fractions each of which can be written as the sum of two unit fractions.

Totten–M2. *Proposed by Bruce Shawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

The boundary of the shadow on the moon is always a circular arc. On a certain day, the moon is seen with the shadow passing through diametrically opposite points. If the centre of the circular arc forming the shadow is on the circumference of the moon, determine the exact proportion of the moon that is not in shadow.



Totten–M3. *Proposed by John Ciriani, Kamloops, BC.*

Prove that the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ does not have a rational root if a, b, and c are odd integers.

Totten–M4. *Proposed by Bill Sands, University of Calgary, Calgary, AB.*

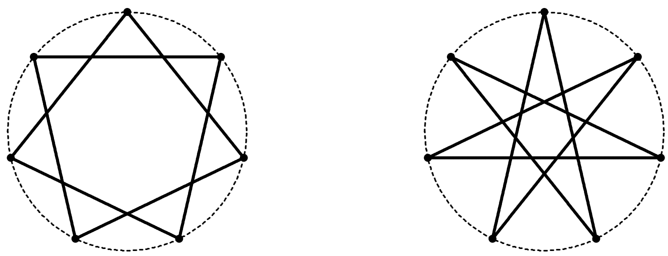
In a survey, some students were asked whether they liked the colour orange. Exactly 2% of the boys in the survey liked orange, while exactly 59% of the girls in the survey liked orange. Altogether, exactly 17% of the students in the survey liked orange. Find the smallest possible number of students in the survey.

Totten–M5. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.*

Let $a \neq 1$ be a positive real number. Determine all pairs of positive integers (x, y) such that $\log_a x - \log_a y = \log_a(x - y)$.

Totten–M6. *Proposed by Suzanne Feldberg, Thompson Rivers University, Kamloops, BC.*

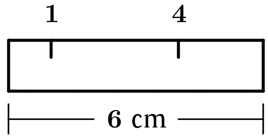
It is widely known how to draw a 5-pointed star quickly. To make it symmetric, one places 5 vertices at $72°$ intervals about a circle and connects the vertices with line segments of equal length without lifting one's pen. By starting from a fixed point and using the same method, one can draw two different (and symmetric) 7-pointed stars without lifting one's pen.



How many different 6-pointed, 8-pointed, or 9-pointed stars can one draw this way? How many different n-pointed stars can one draw this way?

Totten–M7. *Proposed by John Grant McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB.*

An unmarked ruler is known to be exactly 6 cm in length. It is possible to exactly measure all integer lengths from 1 cm to 6 cm using only 2 marks, as shown in the diagram, at 1 cm and 4 cm, since $2 = 6 - 4$, $3 = 4 - 1$, and $5 = 6 - 1$.



Suppose that an unmarked ruler is known to be exactly 30 cm in length.

(a) Find a way of placing 9 or fewer marks on the ruler to be able to exactly measure all integer lengths from 1 cm to 30 cm.

(b) Prove that at least 7 marks are needed to be able to exactly measure all integer lengths from 1 cm to 30 cm.

(c)★ Determine the smallest number of marks required on the ruler to be able to exactly measure all integer lengths from 1 cm to 30 cm.

Totten–M8. *Proposed by Edward J. Barbeau, University of Toronto, Toronto, ON.*

Let T be the set of all ordered triples (a,b,c) of positive integers such that $a < b < c$. We say that two triples (a,b,c) and (u,v,w) are equivalent if $a:b:c = u:v:w$. We use this relation to partition T into equivalence classes. The triple (a,b,c) is *geometric* if $ac = b^2$ (that is, its terms form a geometric sequence) and *harmonic* if $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ (that is, the reciprocals of its terms form an arithmetic sequence).

(a) Verify that if (a,b,c) is geometric, then all triples equivalent to it are also geometric.

(b) Verify that if (a,b,c) is harmonic, then all triples equivalent to it are also harmonic.

(c) Let G be the set of equivalence classes of geometric triples and H be the set of equivalence classes of harmonic triples. Determine a one-to-one correspondence between G and H.

Totten–M9. *Proposed by Kirk Evenrude, Kamloops, BC.*

A train 900 m long, travelling at 90 km/h, approaches a 100 m long bridge.

(a) How many seconds does it take the train to clear the bridge?

(b) Suppose that, just as the train reaches the bridge, it begins to slow down at the rate of 0.2 m/s^2. Now how long does it take to clear the bridge?

Totten–M10. *Proposed by Nicholas Buck, College of New Caledonia, Prince George, BC.*

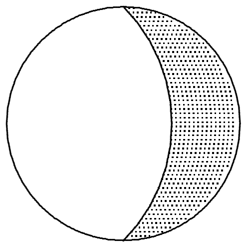
Show that if p is a prime number, and A and B are positive integers such that p divides A, p^2 does not divide A, and p does not divide B, then the Diophantine equation $Ax^2 + By^2 = p^{2008}$ does not have any solutions in positive integers x and y.

Totten–M1. *Proposé par Shawn Godin, École secondaire Cairine Wilson, Orléans, ON.*

Les anciens égyptiens écrivaient toutes leurs fractions en termes de fractions unitaires distinctes, c'est-à-dire de fractions distinctes avec 1 comme numérateur. Par exemple, au lieu d'écrire $\frac{11}{12}$, ils auraient écrit $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$. La fraction unitaire $\frac{1}{2}$ peut être écrite en termes d'autres fractions unitaires comme $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. Trouver une famille infinie de fractions unitaires, chacune pouvant être écrite comme somme de deux fractions unitaires.

Totten–M2. *Proposé par Bruce Shawyer, Université Memorial de Terre-Neuve, St. John's, NL.*

La frontière de l'ombre sur la lune est toujours un arc de cercle. Un certain jour, on peut constater que l'ombre passe par des points diamétralement opposés. Si le centre de l'arc circulaire formant cette ombre se trouve sur la circonférence de la lune, déterminer la portion exacte de la lune qui n'est pas dans l'ombre.



Totten–M3. *Proposé par John Ciriani, Kamloops, BC.*

Montrer que l'équation quadratique $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de racine rationnelle si a, b et c sont des entiers impairs.

Totten–M4. *Proposé par Bill Sands, Université de Calgary, Calgary, AB.*

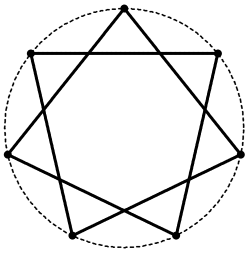
Lors d'un sondage, on a demandé à certains étudiants s'ils aimaient la couleur orange. Chez les garçons exactement 2% ont répondu par oui, tandis que chez les filles, la proportion exacte de oui a été de 59%. Comme au total, exactement 17% des répondants ont dit aimer l'orange, on demande de trouver quel est le plus petit nombre possible de participants au sondage.

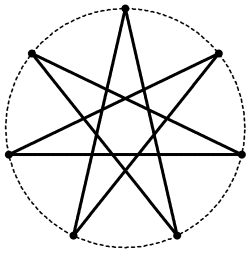
Totten–M5. *Proposé par Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Roumanie.*

Soit $a \neq 1$ un nombre réel positif. Trouver toutes les paires d'entiers positifs (x, y) telles que $\log_a x - \log_a y = \log_a(x-y)$.

Totten–M6. *Proposé par Suzanne Feldberg, Université Thompson Rivers, Kamloops, BC.*

On sait bien comment dessiner rapidement une étoile à 5 sommets. Pour en faire une symétrique, on place les 5 sommets à intervalles de $72°$ sur un cercle et on relie les sommets par des segments rectilignes de longueur égale sans lever son crayon. En partant d'un point fixé et en utilisant la même méthode, on peut dessiner sans lever son crayon deux étoiles différentes (et symétriques) à 7 sommets.

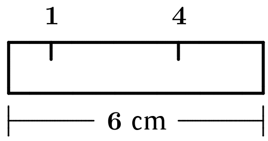




Combien d'étoiles différentes à 6 sommets, 8 sommets, ou 9 sommets peut-on ainsi dessiner? Combien d'étoiles différentes à n sommets peut-on ainsi dessiner?

Totten–M7. *Proposé par John Grant McLoughlin, Université du Nouveau-Brunswick, Fredericton, NB.*

On utilise une règle sans graduation dont on sait qu'elle mesure exactement 6 cm. Il est possible de mesurer exactement toutes les longueurs entières de 1 cm à 6 cm avec seulement 2 marques, comme indiqué dans la figure ci-contre, à 1 cm et 4 cm, car $2 = 6 - 4$, $3 = 4 - 1$ et $5 = 6 - 1$.



Supposons maintenant qu'on utilise une règle d'exactement 30 cm de long.

(a) Trouver un moyen de placer 9 marques sur la règle afin d'être capable de mesurer exactement toutes les longueurs entières, de 1 cm à 30 cm.

(b) Montrer qu'au moins 7 marques sont nécessaires pour être capable de mesurer exactement toutes les longueurs entières, de 1 cm à 30 cm.

(c)★ Déterminer le plus petit nombre de marques à placer sur la règle afin d'être capable de mesurer exactement toutes les longueurs entières, de 1 cm à 30 cm.

Totten–M8. *Proposé par Edward J. Barbeau, Université de Toronto, Toronto, ON.*

Soit T l'ensemble de toutes les triplets ordonnés d'entiers positifs (a, b, c) tels que $a < b < c$. On dit que deux triplets (a, b, c) et (u, v, w) sont équivalents si $a : b : c = u : v : w$. On utilise cette équivalence pour partitionner T en classes d'équivalence. Le triplet (a, b, c) est dit *géométrique* si $ac = b^2$ (c.-à-d. ses éléments forment une suite géométrique) et *harmonique* si $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ (c.-à-d. les inverses de ses éléments forment une suite arithmétique).

(a) Vérifier que si (a, b, c) est géométrique, alors tous les triplets qui lui sont équivalents sont aussi géométriques.

(b) Vérifier que si (a, b, c) est harmonique, alors tous les triplets qui lui sont équivalents sont aussi harmoniques.

(c) Soit G l'ensemble des classes d'équivalence de triplets géométriques et H l'ensemble des classes d'équivalence de triplets harmoniques. Trouver une correspondance biunivoque entre G et H.

Totten–M9. *Proposé par Kirk Evenrude, Kamloops, BC.*

Un train de 900 m de long s'approche d'un pont d'une longueur de 100 m à la vitesse de 90 km/h.

(a) En combien de secondes le train traversera-t-il le pont?

(b) Supposons qu'au moment d'atteindre le pont, le train décélère de $0.2\,\mathrm{m/s^2}$. Combien de temps mettra-t-il cette fois pour traverser le pont?

Totten–M10. *Proposé par Nicholas Buck, Collège de New Caledonia, Prince George, BC.*

Montrer que si p est un nombre premier, et si A et B sont des entiers positifs tels que p divise A, p^2 ne divise pas A, et p ne divise pas B, alors l'équation diophantienne $Ax^2 + By^2 = p^{2008}$ n'a aucune solution en entiers positifs x et y.

Mayhem Solutions

M363. *Proposed by Bruce Shawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

Suppose that A is a six-digit positive integer and B is the positive integer formed by writing the digits of A in reverse order. Prove that $A - B$ is a multiple of 9.

Solution by Jaclyn Chang, student, Western Canada High School, Calgary, AB.

Since A is a six-digit positive integer, it can be expressed in the form $10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10^1e + f$, where a is a positive integer and b, c, d, e, and f are nonnegative integers. Since B is formed by writing the digits of A in reverse order, B is of the form $10^5f + 10^4e + 10^3d + 10^2c + 10^1b + a$.