PROBLEMS

Solutions to problems in this issue should arrive no later than **1 March 2010**. *An asterisk* ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, and 7, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, and 8, French will precede English. In the solutions' section, the problem will be stated in the language of the primary featured solution.

Problems 3451, 3452, 3453, *and* 3454 *below are dedicated by the proposers to the memory of Jim Totten.*

The editor thanks Jean-Marc Terrier of the University of Montreal for translations of the problems.

3451. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Let $(X, < \cdot, \cdot >)$ be a real or complex inner product space and let x, y, and z be nonzero vectors in X. Prove that

$$\sum_{\text{cyclic}} \left| \frac{< z, x >< x, y >}{||x||} \right|^{1/2} \le \sum_{\text{cyclic}} \left(\frac{||x||}{||y||\,||z||} \right)^{1/2} |< y, z >| \ .$$

3452. *Proposed by D.J. Smeenk, Zaltbommel, the Netherlands.*

Prove the following and generalize these results.

(a) $\tan^2 36^\circ + \tan^2 72^\circ = 10$,

(b) $\tan^4 36^\circ + \tan^4 72^\circ = 90$,

(c) $\tan^6 36^\circ + \tan^6 72^\circ = 850$,

(d) $\tan^8 36^\circ + \tan^8 72^\circ = 8050$.

3453. *Proposed by Scott Brown, Auburn University, Montgomery, AL, USA.*

Triangle ABC has side lengths $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$; and altitudes h_a, h_b, h_c from the vertices A, B, C, respectively. Prove that

$$8 \left(\sum_{\text{cyclic}} h_a^2 (h_b + h_c) \right) + 16 h_a h_b h_c \le 3\sqrt{3} \left(\sum_{\text{cyclic}} a^2 (b + c) \right) + 6\sqrt{3} abc \, .$$

3454. *Proposed by Richard Hoshino, Government of Canada, Ottawa, ON.*

Let a, b, c, and d be positive real numbers such that $a+b+c+d=1$. Prove that
$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+d}+\frac{c^3}{d+a}+\frac{d^3}{a+b} \;\geq\; \frac{1}{8}\,.$$

3455. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Find the minimum value of $x^2+y^2+z^2$ over all triples (x,y,z) of real numbers such that
$$13x^2+40y^2+45z^2-36xy+12yz+24xz \;\geq\; 2009$$
and characterize all the triples at which the minimum is attained.

3456. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Given a triangle ABC with circumcircle Γ, let circle Γ' centred on the line BC intersect Γ at D and D'. Denote by Q and Q' the projections of D and D' on the line AB, and by R and R' their projections on AC; assume that none of these projections coincide with a vertex of the triangle.

Show that if Γ' is orthogonal to Γ, then $\dfrac{BQ}{BQ'}=\dfrac{CR}{CR'}$. Does the converse hold?

3457. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $A_n=\sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\dfrac{(-3)^j}{2j+1}a_j$, where $a_j=\sum\limits_{k=2j}^{n}\dbinom{k}{2j}\dfrac{k+1}{2^k}$ and n is a positive integer. Prove that $A_1+A_2+\cdots+A_n\geq n$ with equality for infinitely many n.

3458. *Proposed by Bruce Shawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

Determine the central angle of a sector, such that the square drawn with one vertex on each radius of the sector and two vertices on the circumference, has area equal to the square of the radius of the sector.

3459. *Proposed by Zafar Ahmed, BARC, Mumbai, India.*

Let a, b, c and p, q, r be positive real numbers. Prove that if $q^2\leq pr$ and $r^2\leq pq$, then
$$\frac{a}{pa+qb+rc}+\frac{b}{pb+qc+ra}+\frac{c}{pc+qa+rb}\;\leq\;\frac{3}{p+q+r}\,.$$

When does equality hold?

3460. *Proposed by Tran Quang Hung, student, Hanoi National University, Vietnam.*

The triangle ABC has circumcentre O, orthocentre H, and circumradius R. Prove that

$$3R - 2OH \ \le\ HA + HB + HC \ \le\ 3R + OH$$

3461. *Proposed by Tran Quang Hung, student, Hanoi National University, Vietnam.*

Let I be the incentre of triangle ABC and let A', B', and C' be the intersections of the rays AI, BI, and CI with the respective sides of the triangle. Prove that

$$IA + IB + IC \ \ge\ 2(IA' + IB' + IC')\,.$$

3462. *Proposed by Sotiris Louridas, Aegaleo, Greece.*

Let x, y, and z be positive real numbers such that

$$\left(x^3 + z^3 - y^3\right)\left(y^3 + x^3 - z^3\right)\left(z^3 + y^3 - x^3\right) \ >\ 0\,.$$

Prove that

$$\left(x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz\right) \prod_{\text{cyclic}} \left(x^3 + y^3 - z^3 + xyz\right) \le 3 \prod_{\text{cyclic}} \sqrt[3]{x^4\left(x^2 + yz\right)^4}\,.$$

. . . .

3451. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Soit $(X, <\cdot,\cdot>)$ un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire et soit x, y et z des vecteurs non nuls de X. Montrer que

$$\sum_{\text{cyclique}} \left|\frac{<z,x><x,y>}{||x||}\right|^{1/2} \ \le\ \sum_{\text{cyclique}} \left(\frac{||x||}{||y||\,||z||}\right)^{1/2} |<y,z>|\ .$$

3452. *Proposé par D.J. Smeenk, Zaltbommel, Pays-Bas.*

Montrer les égalités suivantes et généraliser ces résultats.

(a) $\tan^2 36^\circ + \tan^2 72^\circ = 10$,

(b) $\tan^4 36^\circ + \tan^4 72^\circ = 90$,

(c) $\tan^6 36^\circ + \tan^6 72^\circ = 850$,

(d) $\tan^8 36^\circ + \tan^8 72^\circ = 8050$.

3453. *Proposé par Scott Brown, Université Auburn, Montgomery, AL, USA.*

Soit $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ les longueurs des côtés du triangle ABC, de hauteurs respectives h_a, h_b, h_c issues des sommets A, B, C. Montrer que

$$8\left(\sum_{\text{cyclique}} h_a^2(h_b+h_c)\right) + 16h_ah_bh_c \;\leq\; 3\sqrt{3}\left(\sum_{\text{cyclique}} a^2(b+c)\right) + 6\sqrt{3}abc\,.$$

3454. *Proposé par Richard Hoshino, Gouvernement du Canada, Ottawa, ON.*

Soit a, b, c et d des nombres réels non négatifs avec $a+b+c+d=1$. Montrer que

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+d}+\frac{c^3}{d+a}+\frac{d^3}{a+b} \;\geq\; \frac{1}{8}\,.$$

3455. *Proposé by Michel Bataille, Rouen, France.*

Trouver la valeur minimale de $x^2+y^2+z^2$ pour tous les triplets (x, y, z) de nombres réels tels que

$$13x^2+40y^2+45z^2-36xy+12yz+24xz \;\geq\; 2009$$

et caractériser tous les triplets pour lesquels le minimum est atteint.

3456. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Étant donné un triangle ABC et Γ son cercle circonscrit, soit Γ' un cercle centré sur la droite BC et coupant Γ en D et D'. Désignons par Q et Q' les projections de D et D' sur la droite AB, et soit R et R' leurs projections sur AC ; supposons qu'aucune de ces projections ne coincide avec un sommet du triangle.

Montrer que si Γ' est orthogonal à Γ, alors $\dfrac{BQ}{BQ'} = \dfrac{CR}{CR'}$. La réciproque est-elle valide ?

3457. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit $A_n = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \dfrac{(-3)^j}{2j+1}a_j$, où $a_j = \sum\limits_{k=2j}^{n}\dbinom{k}{2j}\dfrac{k+1}{2^k}$ et n est un entier positif. Montrer que $A_1 + A_2 + \cdots + A_n \geq n$ où l'on a égalité pour une infinité de n.

3458. *Proposé by Bruce Shawyer, Université Memorial de Terre-Neuve, St. John's, NL.*

Déterminer l'angle au centre d'un secteur tel que le carré, construit avec un sommet sur chaque rayon du secteur et deux sommets sur la circonférence, possède une aire égale au carré du rayon du secteur.

3459. *Proposé par Zafar Ahmed, BARC, Mumbai, Inde.*

Soit a, b, c et p, q, r des nombres réels positifs. Montrer que si $q^2 \leq pr$ et $r^2 \leq pq$, alors

$$\frac{a}{pa+qb+rc} + \frac{b}{pb+qc+ra} + \frac{c}{pc+qa+rb} \leq \frac{3}{p+q+r}.$$

Quand y a-t-il égalité ?

3460. *Proposé par Tran Quang Hung, étudiant, Université Nationale de Hanoi, Vietnam.*

Soit O le centre du cercle circonscrit du triangle ABC, de rayon R , et H son orthocentre. Montrer que

$$3R - 2OH \ \leq \ HA + HB + HC \ \leq \ 3R + OH$$

3461. *Proposed by Tran Quang Hung, étudiant, Université Nationale de Hanoi, Vietnam.*

Soit I le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et soit A', B' et C' les intersections des rayons AI, BI et CI avec les côtés respectifs du triangle. Montrer que

$$IA + IB + IC \ \geq \ 2(IA' + IB' + IC').$$

3462. *Proposé par Sotiris Louridas, Aegaleo, Grèce.*

Soit x, y et z trois nombres réels positifs tels que

$$\left(x^3 + z^3 - y^3\right)\left(y^3 + x^3 - z^3\right)\left(z^3 + y^3 - x^3\right) \ > \ 0.$$

Montrer que

$$\left(x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz\right) \prod_{\text{cyclique}} \left(x^3 + y^3 - z^3 + xyz\right) \leq 3 \prod_{\text{cyclique}} \sqrt[3]{x^4\left(x^2 + yz\right)^4}.$$