TOTTEN PROBLEMS

The following problems have all been dedicated by the proposers to the lasting memory of Jim Totten. Solutions should arrive no later than **1 March 2010**. *An asterisk* ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

The editor thanks Jean-Marc Terrier of the University of Montreal for translations of the problems.

TOTTEN–01. *Proposed by Cosmin Pohoaţă, Tudor Vianu National College, Bucharest, Romania.*

Let H be the orthocentre of triangle ABC and let P be the second intersection of the circumcircle of triangle AHC with the internal bisector of $\angle BAC$. If X is the circumcentre of triangle APB and if Y is the orthocentre of triangle APC, prove that the length of XY is equal to the circumradius of triangle ABC.

TOTTEN–02. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.*

Let $k \geq 2$ be an integer and let $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ be a bounded continuous function. If x is a positive real number, find the value of

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{n} \int_0^x \frac{f(t)}{\left(1+t^k\right)^n}\, dt\,.$$

TOTTEN–03. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.*

Let $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Find the limit

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}\right) dx_1 \ldots dx_n\,.$$

TOTTEN–04. *Proposed by Juan-Bosco Romero Márquez, Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain.*

Suppose that $0 < a < b$, $m_0 = \sqrt{ab}$, and $m_1 = \dfrac{a+b}{2}$. If $x \geq 0$, prove that

$$\frac{x}{m_1(x+m_1)} \;\leq\; \frac{1}{b-a}\log\frac{b(x+a)}{a(x+b)} \;\leq\; \frac{x}{m_0(x+m_0)}\,.$$

TOTTEN–05. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let I be the incentre of triangle ABC. Let the point A' be such that $\overrightarrow{AA'} = (\cos A)\overrightarrow{AI}$, and let points B' and C' be defined similarly. Find the radius of the circle passing through A', B', and C' and locate its centre.

TOTTEN–06. *Proposed by Bill Sands, University of Calgary, Calgary, AB.*

Jim and three of his buddies played a round of golf. As usual, Jim won the game. In fact, he beat every two of his three buddies, in the following sense. Let his three buddies be A, B, and C and let a_i be A's score on hole i, for all $1 \leq i \leq 18$, and similarly define b_i and c_i. Set $S_{ab} = \sum_{i=1}^{18} \min(a_i, b_i)$, and similarly define S_{ac} and S_{bc}. Then Jim's total score was less than S_{ab}, S_{ac}, and S_{bc}. However, Jim's score was more than $S_{abc} = \sum_{i=1}^{18} \min(a_i, b_i, c_i)$. Jim's score was 72. What was the minimum possible score of any of his buddies?

TOTTEN–07. *Proposed by Šefket Arslanagić and Faruk Zejnulahi, University of Sarajevo, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina.*

Let a, b, and c be nonnegative real numbers such that $a^2+b^2+c^2=1$. Prove or disprove that

(a) $1 \leq \dfrac{a}{1-ab} + \dfrac{b}{1-bc} + \dfrac{c}{1-ca} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,

(b) $1 \leq \dfrac{a}{1+ab} + \dfrac{b}{1+bc} + \dfrac{c}{1+ca} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

TOTTEN–08. *Proposed by Richard Hoshino, Government of Canada, Ottawa, ON.*

In triangle ABC suppose that $AB < AC$. Let D and M be the points on side BC for which AD is the angle bisector and AM is the median. Let F be on side AC so that AD is perpendicular to DF. Finally, let E be the intersection of AM and DF. Prove that $AB \cdot DE + AB \cdot DF = AC \cdot EF$.

TOTTEN–09. *Proposed by Richard Hoshino, Government of Canada, Ottawa, ON.*

Let n and k be integers with $n \geq 2$ and $k \geq 0$. Consider n dinner guests sitting around a circular table. Let $g_n(k)$ be the number of ways that k of these n guests can be chosen so that no two chosen guests are sitting next to one another. To illustrate, $g_6(0)=1$, $g_6(1)=6$, $g_6(2)=9$, $g_6(3)=2$, and $g_6(4)=0$ for all $k \geq 4$. For each $n \geq 2$, let

$$f_n(x) \;=\; \sum_{k \geq 0} g_n(k) x^k \,.$$

For example, $f_6(x) = 1+6x+9x^2+2x^3 = (1+2x)(1+4x+x^2)$. Determine all n for which $(1+2x)$ is a factor of $f_n(x)$.

TOTTEN–10. *Proposed by D.J. Smeenk, Zaltbommel, the Netherlands.*

Determine all triangles ABC whose side lengths are positive integers and such that $\cos C = \frac{4}{5}$.

TOTTEN–11. *Proposed by Walther Janous, Ursulinengymnasium, Innsbruck, Austria.*

(a) Let x, y, and z be positive real numbers such that $x+y+z=1$. Prove that

$$\frac{8\sqrt{3}}{9} \le \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \sqrt{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{z}} - \sqrt{z}\right).$$

(b) ★. Let $n \ge 2$ and let x_1, x_2, ..., x_n be positive real numbers such that $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Prove or disprove that

$$\left(\frac{n-1}{\sqrt{n}}\right)^n \le \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{x_k}} - \sqrt{x_k}\right).$$

TOTTEN–12. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let w, x, y, and z be positive real numbers with $w+x+y+z = wxyz$, and let

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{x^3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{x^3}}}.$$

Prove that $\sqrt[3]{wxy} + \sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{yzw} + \sqrt[3]{zwx} \ge f(w) + f(x) + f(y) + f(z)$.

. . . .

TOTTEN–01. *Proposé par Cosmin Pohoaţă, Collège National Tudor Vianu, Bucarest, Roumanie.*

Soit H l'orthocentre du triangle ABC et soit P la seconde intersection du cercle circonscrit du triangle AHC avec la bissectrice intérieure de l'angle BAC. Si X est le centre du cercle circonscrit du triangle APB et Y l'orthocentre du triangle APC, montrer que la longueur de XY est égale au rayon du cercle circonscrit du triangle ABC.

TOTTEN–02. *Proposé par Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Roumanie.*

Soit $k \ge 2$ un entier et $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Pour un nombre réel positif x, trouver la valeur de

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{n} \int_0^x \frac{f(t)}{(1+t^k)^n}\, dt.$$

TOTTEN–03. *Proposé par Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Roumanie.*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Trouver la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}\right) dx_1 \ldots dx_n\,.$$

TOTTEN–04. *Proposé par Juan-Bosco Romero Márquez, Université de Valladolid, Valladolid, Espagne.*

On suppose que $0 < a < b$, $m_0 = \sqrt{ab}$ et $m_1 = \dfrac{a+b}{2}$. Si $x \geq 0$, montrer que

$$\frac{x}{m_1(x+m_1)} \leq \frac{1}{b-a} \log \frac{b(x+a)}{a(x+b)} \leq \frac{x}{m_0(x+m_0)}\,.$$

TOTTEN–05. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit I le centre du cercle inscrit du triangle ABC. Soit A' le point tel que $\overrightarrow{AA'} = (\cos A)\overrightarrow{AI}$, et soit B' et C' les points définis de manière analogue. Trouver le rayon du cercle passant par A', B' et C' ainsi que la position de son centre.

TOTTEN–06. *Proposé par Bill Sands, Université de Calgary, Calgary, AB.*

Jim et trois de ses copains ont joué une ronde de golf. Comme d'habitude, Jim a gagné la partie. En fait, il a battu chaque paire de ses trois copains, dans le sens suivant. Soit A, B et C ses trois copains et soit a_i le score de A au trou i pour tout $1 \leq i \leq 18$; on définit de même b_i et c_i. Soit $S_{ab} = \sum\limits_{i=1}^{18} \min(a_i, b_i)$, et de manière analogue, S_{ac} et S_{bc}. Le score total de Jim a été plus petit que S_{ab}, S_{ac} et S_{bc}. Par contre, son résultat de 72 dépassait $S_{abc} = \sum\limits_{i=1}^{18} \min(a_i, b_i, c_i)$. Quel était le score minimal possible de chacun de ses copains ?

TOTTEN–07. *Proposé par Šefket Arslanagić et Faruk Zejnulahi, Université de Sarajevo, Sarajevo, Bosnie et Herzégovine.*

Soit a, b et c trois nombres réels non négatifs tels que $a^2+b^2+c^2 = 1$. Etudier la validité de

(a) $1 \leq \dfrac{a}{1-ab} + \dfrac{b}{1-bc} + \dfrac{c}{1-ca} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,

(b) $1 \leq \dfrac{a}{1+ab} + \dfrac{b}{1+bc} + \dfrac{c}{1+ca} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

TOTTEN–08. *Proposé par Richard Hoshino, Gouvernement du Canada, Ottawa, ON.*

Supposons que dans le triangle ABC, on a $AB < AC$. Soit D et M les points sur le côté BC pour lesquels AD est la bissectrice et AM la médiane. Soit F le point sur le côté AC tel que AD soit perpendiculaire à DF. Soit finalement E l'intersection de AM et DF. Montrer que $AB \cdot DE + AB \cdot DF = AC \cdot EF$.

TOTTEN–09. *Proposé par Richard Hoshino, Gouvernement du Canada, Ottawa, ON.*

Soit n et k deux entiers tels que $n \geq 2$ et $k \geq 0$. On a n hôtes à dîner, assis autour d'une table ronde. Soit $g_n(k)$ le nombre de possibilités que k de ces n hôtes puissent être choisis de telle sorte qu'aucune paire d'hôtes choisis soit assis l'un à côté de l'autre. Par exemple, $g_6(0) = 1$, $g_6(1) = 6$, $g_6(2) = 9$, $g_6(3) = 2$, et $g_6(4) = 0$ pour tout $k \geq 4$. Pour tout $n \geq 2$, soit

$$f_n(x) \;=\; \sum_{k \geq 0} g_n(k) x^k \,.$$

Par exemple, $f_6(x) = 1+6x+9x^2+2x^3 = (1+2x)\big(1+4x+x^2\big)$. Déterminer tous les n pour lesquels $(1+2x)$ est un facteur de $f_n(x)$.

TOTTEN–10. *Proposé par D.J. Smeenk, Zaltbommel, Pays-Bas.*

Trouver tous les triangles ABC dont la longueur des côtés sont des entiers positifs et tels que $\cos C = \frac{4}{5}$.

TOTTEN–11. *Proposé par Walther Janous, Ursulinengymnasium, Innsbruck, Autriche.*

(a) Soit x, y et z trois nombres réels positifs tels que $x + y + z = 1$. Montrer que

$$\frac{8\sqrt{3}}{9} \;\leq\; \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \sqrt{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{z}} - \sqrt{z}\right) \,.$$

(b) ★. Soit $n \geq 2$ et soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n nombres réels positifs tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Etudier la validité de

$$\left(\frac{n-1}{\sqrt{n}}\right)^n \;\leq\; \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{x_k}} - \sqrt{x_k}\right) \,.$$

TOTTEN–12. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit w, x, y et z des nombres réels positifs avec $w+x+y+z = wxyz$, et soit

$$f(x) \;=\; \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{x^3}}} \;+\; \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{x^3}}} \,.$$

Montrer que $\sqrt[3]{wxy}+\sqrt[3]{xyz}+\sqrt[3]{yzw}+\sqrt[3]{zwx} \;\geq\; f(w)+f(x)+f(y)+f(z)$.