PROBLEMS

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1er septembre 2009**. *Une étoile* ($\star$) *après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, de Collège universitaire de Saint-Boniface, Winnipeg, MB et Jean-Marc Terrier, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

3393. Correction. *Proposé par Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbie.*

Soit le triangle ABC, où $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et où s est le demi périmètre. Montrer que

$$\frac{y+z}{x}\cdot\frac{A}{a(s-a)}+\frac{z+x}{y}\cdot\frac{B}{b(s-b)}+\frac{x+y}{z}\cdot\frac{C}{c(s-c)}\ \geq\ \frac{9\pi}{s^2}\,,$$

où les angles A, B et C sont mesurés en radians et x, y et z sont des nombres réels positifs quelconques.

3414. *Proposé par D.J. Smeenk, Zaltbommel, Pays-Bas.*

Un triangle ABC varie de sorte que son cercle circonscrit $\gamma_1(O,R)$ et son cercle inscrit $\gamma_2(I,r)$ restent fixes, O et I, R et r étant leur centre et leur rayon respectifs. Trouver le lieu de l'orthocentre H du triangle ABC.

3415. *Proposé par Cezar Lupu, étudiant, Université de Bucarest, Bucarest, Roumanie.*

Soit a, b et c des nombres réels tels que $abc = 1$. Montrer que

$$\sqrt[3]{a}\ +\ \sqrt[3]{b}\ +\ \sqrt[3]{c}\ \leq\ \sqrt[3]{3(3+a+b+c+ab+bc+ca)}\,.$$

3416. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 6$ et la récursion

$$a_{n+1}\ =\ \frac{1}{13}\left(8a_n\sqrt{3a_n^2+13}-6a_n^2-13\right)$$

pour $n \geq 0$. Montrer que tout a_n est un entier positif, et que $a_n^2 - a_{n+1}$ est divisible par 13 pour tout $n \geq 0$.

3417. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Posons $S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$. On aurait alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(S_{-1}(n)\right)^2}{S_1(n)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{-1}(n)}{S_3(n)}\right) + 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{-1}(n)}{S_1(n)}\right).$$

3418. *Proposé par Pantelimon George Popescu, Bucarest, Roumanie et José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Soit $\mathcal{I}(\phi)$ l'ensemble de toutes les anti-dérivées de la fonction continue ϕ.

(a) Déterminer la fonction continue $f : I_p \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ telle que $f(0) = 1$ et $f^{-p} \in \mathcal{I}(f)$ où p est un nombre naturel impair et l'intervalle I_p a zéro à l'intérieur et est maximal pour cettes propriétés de f.

(b) Montrer que $p = q$ si et seulement si $I_p = I_q$.

3419. *Proposé par Vo Quoc Ba Can, Université de Médecine et Pharmacie de Can Tho, Can Tho, Vietnam.*

Soit a, b et c trois nombres réels positifs.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{\text{cyclique}} \sqrt{\frac{a^2 + 4bc}{b^2 + c^2}} \geq 2 + \sqrt{2}$.

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{\text{cyclique}} \sqrt{\frac{a^2 + bc}{b^2 + c^2}} \geq 2 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

3420. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right)^{k+1} < n+1 < \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}\right)^{k+1}.$$

3421. *Proposé par Cao Minh Quang, Collège Nguyen Binh Khiem, Vinh Long, Vietnam.*

Soit a, b et c trois nombres réels positifs tels que $abc \leq 1$. Montrer que

$$\frac{a}{b^2+b} + \frac{b}{c^2+c} + \frac{c}{a^2+a} \geq \frac{3}{2}.$$

3422. *Proposé par Cao Minh Quang, Collège Nguyen Binh Khiem, Vinh Long, Vietnam.*

Soit a, b et c trois nombres réels positifs tels que $a+b+c \leq 1$. Montrer que

$$\frac{a}{a^3+a^2+1} + \frac{b}{b^3+b^2+1} + \frac{c}{c^3+c^2+1} \leq \frac{27}{31}\,.$$

3423. *Proposé par Cao Minh Quang, Collège Nguyen Binh Khiem, Vinh Long, Vietnam.*

Soit $n \geq 2$ un entier et x_1, x_2, $\dots$, x_n n nombres réels positifs tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2n$. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x_j}{\sqrt{x_i^3+1}} \right) \geq \frac{2n(n-1)}{3}\,.$$

3424. *Proposé par Yakub N. Aliyev, Université d'Etat de Bakou, Bakou, Azerbaïdjan.*

Pour un entier positif m, soit σ la permutation de $\{0, 1, \dots, 2m-1\}$ définie par $\sigma(2i) = i$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, m$ et $\sigma(2i-1) = m+i$ pour $i = 1, 2, \dots, m$. Montrer qu'il existe un entier positif k tel que $\sigma^k = \sigma$ et $k \leq 2m+1$.

3425. *Proposé par Slavko Simic, Institut de Mathématiques SANU, Belgrade, Serbie.*

Pour x réel différent de -1, on définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$. Montrer que si $f(x) = f(y)$ pour certains $x \neq y$, alors

$$\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}\right)^2 \geq \ln f(y)\,.$$

. . . .

3393. Correction. *Proposed by Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbia.*

Let ABC be a triangle with $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, and semiperimeter s. Prove that

$$\frac{y+z}{x} \cdot \frac{A}{a(s-a)} + \frac{z+x}{y} \cdot \frac{B}{b(s-b)} + \frac{x+y}{z} \cdot \frac{C}{c(s-c)} \geq \frac{9\pi}{s^2}\,,$$

where the angles A, B, and C are measured in radians and x, y, and z are any positive real numbers.

3414. *Proposed by D.J. Smeenk, Zaltbommel, the Netherlands.*

As triangle ABC varies, its circumcircle $\gamma_1(O,R)$ and its incircle $\gamma_2(I,r)$ are fixed, where O and I are the respective centres and R and r are the respective radii. Find the locus of the orthocentre H of triangle ABC.

3415. *Proposed by Cezar Lupu, student, University of Bucharest, Bucharest, Romania.*

Let a, b, and c be positive real numbers such that $abc = 1$. Prove that

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} \leq \sqrt[3]{3(3+a+b+c+ab+bc+ca)}\,.$$

3416. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let the sequence (a_n) be defined by $a_0 = 6$ and the recursion

$$a_{n+1} = \frac{1}{13}\left(8a_n\sqrt{3a_n^2+13} - 6a_n^2 - 13\right)$$

for $n \geq 0$. Prove that each a_n is a positive integer, and that $a_n^2 - a_{n+1}$ is divisible by 13 for each $n \geq 0$.

3417. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$. Prove that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(S_{-1}(n)\right)^2}{S_1(n)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{-1}(n)}{S_3(n)}\right) + 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{-1}(n)}{S_1(n)}\right).$$

3418. *Proposed by Pantelimon George Popescu, Bucharest, Romania and José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Let $\mathcal{I}(\phi)$ be the set of all antiderivatives of a continuous function ϕ.

(a) Determine the continuous function $f\colon I_p \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ such that $f(0) = 1$ and $f^{-p} \in \mathcal{I}(f)$, where p is an odd natural number and the interval I_p contains zero and is maximal for the given properties of f.

(b) Prove that $p = q$ if and only if $I_p = I_q$.

3419. *Proposed by Vo Quoc Ba Can, Can Tho University of Medicine and Pharmacy, Can Tho, Vietnam.*

Let a, b, and c be positive real numbers.

(a) Prove that $\displaystyle\sum_{\text{cyclic}} \sqrt{\frac{a^2+4bc}{b^2+c^2}} \geq 2+\sqrt{2}$.

(b) Prove that $\displaystyle\sum_{\text{cyclic}} \sqrt{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}} \geq 2+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

3420. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Prove that

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right)^{k+1} \;<\; n+1 \;<\; \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}\right)^{k+1}.$$

3421. *Proposed by Cao Minh Quang, Nguyen Binh Khiem High School, Vinh Long, Vietnam.*

Let a, b, and c be positive real numbers such that $abc \leq 1$. Prove that

$$\frac{a}{b^2+b} + \frac{b}{c^2+c} + \frac{c}{a^2+a} \;\geq\; \frac{3}{2}\,.$$

3422. *Proposed by Cao Minh Quang, Nguyen Binh Khiem High School, Vinh Long, Vietnam.*

Let a, b, and c be positive real numbers such that $a+b+c \leq 1$. Prove that

$$\frac{a}{a^3+a^2+1} + \frac{b}{b^3+b^2+1} + \frac{c}{c^3+c^2+1} \;\leq\; \frac{27}{31}\,.$$

3423. *Proposed by Cao Minh Quang, Nguyen Binh Khiem High School, Vinh Long, Vietnam.*

Let $n \geq 2$ be an integer and $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positive real numbers such that $x_1+x_2+\cdots+x_n = 2n$. Prove that

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{x_j}{\sqrt{x_i^3+1}}\right) \;\geq\; \frac{2n(n-1)}{3}\,.$$

3424. *Proposed by Yakub N. Aliyev, Baku State University, Baku, Azerbaijan.*

For a positive integer m, let σ be the permutation of $\{0, 1, \ldots, 2m-1\}$ defined by $\sigma(2i) = i$ for each $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ and $\sigma(2i-1) = m+i$ for each $i = 1, 2, \ldots, m$. Prove that there exists a positive integer k such that $\sigma^k = \sigma$ and $k \leq 2m+1$.

3425. *Proposed by Slavko Simic, Mathematical Institute SANU, Belgrade, Serbia.*

For real $x \neq -1$, let $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$. Prove that if $f(x) = f(y)$ for some $x \neq y$, then

$$\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}\right)^2 \;\geq\; \ln f(y)\,.$$