SKOLIAD No. 108

Robert Bilinski

Please send your solutions to the problems in this edition by ***1 August, 2008***. A copy of **MATHEMATICAL MAYHEM Vol. 2** will be presented to one pre-university reader who sends in solutions before the deadline. The decision of the editor is final.

Nos questions proviennent ce mois-ci du Concours de l'Association Mathématique du Québec 2006 (niveau secondaire). Nous remercions Véronique Hussin, Université de Montréal, qui s'occupe des concours de l'AMQ du secondaire.

Concours de l'Association Mathématique du Québec
(niveau secondaire) 9 février 2006

1. **Un carré magique particulier**. Il est bien connu qu'un carré magique est obtenu en mettant des nombres dans un carré de telle sorte que la somme de chaque ligne, colonne et diagonale soit la même, comme par exemple,

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Imaginons maintenant que nous décidions d'inventer une nouvelle forme de tel carré, en remplaçant la somme par le produit. On demande de trouver un tel carré en remplaçant les astérisques, $*$, par des nombres naturels, non nécessairement distincts ou consécutifs, dans le carré suivant :

$*$	1	$*$
4	$*$	$*$
$*$	$*$	2

2. **La promenade de Clovis**. Clovis aime se promener parmi les entiers naturels. Chaque jour, il commence avec un nombre naturel de son choix, le plus grand possible. Puis, durant la journée, il passe de nombre en nombre selon la règle suivante. En supposant que sa suite en est au nombre n :

(1) Si n est divisible par 3 sans reste, alors le nombre suivant sera $n/3$.

(2) Si le reste de la division de n par 3 est 1, alors le nombre suivant est $2n+1$.

(3) Si le reste de la division de n par 3 est 2, alors le nombre suivant est $2n-1$.

(4) Si $n=1$, la suite s'arrête.

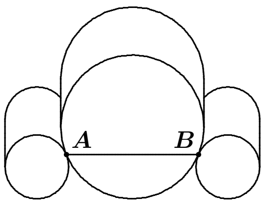
Depuis des années qu'il joue à ce jeu, il a constaté que, quel que soit le nombre de départ, la série aboutissait toujours à 1. Il se demande s'il existe une série qui croît indéfiniment, avec en moyenne des nombres de plus en plus grands, ou alors une série cyclique qui ne contient pas le nombre 1.

Dites si une telle série est possible, et donnez-en un exemple, ou alors montrez qu'une telle série n'existe pas, et pour cela démontrez que toutes les suites construites de cette façon meneront inévitablement au nombre 1.

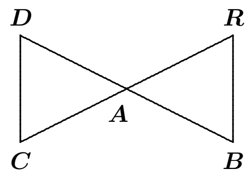
Voici un exemple d'une telle série : en commençant avec 55, on obtient 111, 37, 75, 25, 51, 17, 33, 11, 21, 7, 15, 5, 9, 3 et 1, ce qui termine la série.

3. **Huit boules dans deux urnes**. On vous confie deux urnes semblables, quatre boules blanches et quatre boules noires. Vous devez répartir les boules entre les deux urnes (pas nécessairement le même nombre dans chaque urne). On rendra ensuite les deux urnes indiscernables. Quelle répartition devez-vous choisir pour maximiser vos chances, en tirant une boule au hasard, d'en obtenir une blanche ?

4. **Les trois tonneaux attachés**. Trois gros tonneaux cylindriques, couchés parallélement sur le sol, sont attachés par un câble d'acier à leurs points de contact, A et B, de façon à ce qu'ils demeurent bien en place. Sachant que les deux plus petits ont chacun un rayon de 4 mètres et que le plus gros, au centre, a un rayon de 9 mètres, quelle est la longueur du câble d'acier ?



5. **Les mots magiques**. Un illusionniste est à la recherche de mots magiques pour accompagner ses divers tours de magie. Il décide de construire ses mots magiques en partant du diagramme à la droite. Il parcourt un chemin dans le diagramme et note les lettres rencontrées. Chaque mot magique doit contenir exactement 11 lettres et doit débuter et se terminer par la lettre A. Deux lettres consécutives ne doivent jamais être identiques. Combien y a-t'il de tels mots magiques ?



Note : Voici deux mots magiques possibles : $ABRACADABRA$ et $ARADCABARBA$.

6. **Tous les dix chiffres**. Trouver le plus petit entier positif N tel que, dans la notation décimale, N et $2N$ utilisent ensemble tous les dix chiffres : 0, 1, 2, . . . , 8, 9.

7. **Les garnitures de pizza**. À la pizzeria de Julio, toutes les pizza comportent du fromage et de la sauce tomate. Le choix de garnitures se limite aux olives noires, aux anchois et au saucisson. Sur les 200 clients que Julio a reçus hier, 40 ont pris des anchois, 80 des olives noires et 120 du saucisson, 60 ont pris à la fois des olives noires et du saucisson, mais aucun n'a pris à la fois des anchois et des olives noires, ni à la fois des anchois et du saucisson. Combien de clients n'ont pris aucune des trois garnitures ?

Mathematics Association of Quebec Contest
(Secondary level) February 9, 2006

1. **A particular magic square**. It is well known that a magic square is obtained by putting numbers in a square such that the sum of each row, column, and diagonal is the same, as for example,

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Imagine now that we decide to invent a new form of such squares by replacing the sum by a product. We ask you to find such a square by replacing the asterisks, $*$, by natural numbers, not necessarily distinct or consecutive, in the following square:

$*$	1	$*$
4	$*$	$*$
$*$	$*$	2

2. **Clovis' outing**. Clovis likes to take an outing in the natural numbers. Each day, he starts with a natural number of his choice, the biggest possible. Then, during his day, he passes from number to number using the following rules. Suppose that the sequence of numbers is currently at n.

(1) If n is divisible by 3 without remainder, then the next number is $n/3$.

(2) If the remainder after dividing n by 3 is 1, then the next number is $2n + 1$.

(3) If the remainder after dividing n by 3 is 2, then the next number is $2n - 1$.

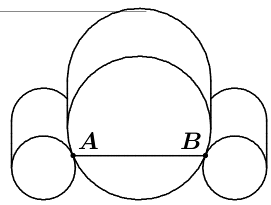
(4) If $n = 1$, then the sequence stops.

Over the years that he has played this game, he noticed that, whatever the starting number, the sequence always ended up with the number 1. However, he wonders if there is a sequence that increases indefinitely, with larger and larger numbers on average, or such that it ends up in a loop of numbers that does not contain 1. Determine if such a sequence is possible and give an example, or show that such a sequence does not exist by showing that all sequences using the above rules inevitably end up at the number 1.

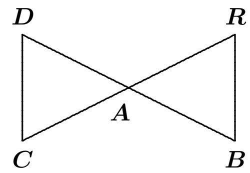
Here is an example of such a sequence: Starting with 55, we get 111, 37, 75, 25, 51, 17, 33, 11, 21, 7, 15, 5, 9, 3 and 1, which ends the sequence.

3. **Eight balls in two urns**. We give you two similar urns, four white balls, and four black balls. You must separate the balls amongst the two urns (not necessarily the same number in each urn), after which both urns will be made indistinguishable. How should the balls be distributed to maximize the chances that, if you draw a ball randomly from a randomly chosen urn, you will obtain a white ball?

4. **The three attached barrels**. Three big cylindrical barrels, lying parallel to the earth, are attached by a steel cable at their contact points, A and B, such that they stay fixed in place. Knowing that the two smaller ones each have a radius of 4 meters and the biggest one has a radius of 9 meters, what is the length of the steel cable?



5. **The magic words**. An illusionist is searching for magic words to accompany his many magic tricks. He decides to construct his magic words starting with the diagram on the right. He takes a path through the diagram and jots downs the letters he finds on it. Each magic word must have exactly 11 letters and must start and end with the letter A. Two consecutive letters must never be identical. How many magic words are there?



Note: Here are two possible magic words: $ABRACADABRA$ and $ARADCABARBA$.

6. **All ten digits**. Find the smallest positive natural number N such that, in the decimal notation, N and $2N$ together use all ten digits: 0, 1, 2, $\ldots$, 9.

7. **The pizza toppings**. At the Julio pizzeria, all the pizzas have cheese and tomato sauce on them. The choice of toppings is limited to black olives, anchovies, and sausage. Of the 200 clients Julio had yesterday, 40 took anchovies, 80 took black olives, 120 took sausage, 60 took at the same time black olives and sausage, but none took at the same time anchovies and black olives or anchovies and sausage. How many clients took none of the three toppings?

We are not featuring any solutions in the Skoliad this issue, since the solutions that would normally appear here would have to be prepared before the deadline date for submissions. Solutions will continue as normal in the next issue.

That brings us to the end of another issue. Continue sending in your contests and solutions.