PROBLEMS

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1er septembre 2008**. *Une étoile* ($\star$) *après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier et Martin Goldstein, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

3313. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne et Pantelimon George Popescu, Bucarest, Roumanie.*

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels tels que $x_k > 1$ pour $1 \le k \le n$. Si l'on pose $x_{n+1} = x_1$, montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\log_{x_k} x_{k+1} + \log_{x_{k+1}} x_k\right) \;\le\; \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \log^n_{x_k} x_{k+1}\right)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

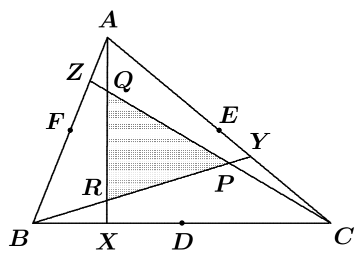
3314. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit a, b et c trois nombres réels positifs. Montrer que

$$\sum_{\text{cyclique}} \frac{a}{b} \;\ge\; \frac{3}{4} + \sum_{\text{cyclique}} \frac{(a+c)^2 + (a+b)c}{(b+c)(2a+b+c)}\,.$$

3315. *Proposé par Stanley Rabinowitz, MathPro Press, Chelmsford, MA, É-U.*

Soit D, E et F les milieux respectifs des côtés BC, CA et AB du triangle ABC. Soit respectivement X, Y et Z des points sur les segments BD, CE et AF. Les droites AX, BY et CZ bordent un triangle central (en ombragé dans la figure). Soit respectivement X', Y' et Z' les réflexions de X, Y et Z par rapport aux points D, E et F. A leur tour, les points X', Y' et Z' déterminent un autre triangle central $P'Q'R'$.



Montrer que

$$\frac{2+\sqrt{3}}{4} \;\le\; \frac{[PQR]}{[P'Q'R']} \;\le\; 8 - 4\sqrt{3}\,,$$

où $[STU]$ représente l'aire du triangle STU.

3316. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit a, b et c trois nombres réels positifs. Montrer que

$$\sum_{\text{cyclique}} \frac{a}{b} + \Big(\sum_{\text{cyclique}} a^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{\text{cyclique}} \frac{1}{a^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{2}{3}\Big(\sum_{\text{cyclique}} a\Big)\Big(\sum_{\text{cyclique}} \frac{1}{a}\Big).$$

3317. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit a, b et c trois nombres réels positifs. Montrer que

$$\begin{aligned} &\Big(\sum_{\text{cyclique}} \frac{a^3}{b^2-bc+c^2}\Big)\Big(\sum_{\text{cyclique}} \frac{b^2c^2}{a^3(b^2-bc+c^2)}\Big) \\ &\qquad \geq \Big(\sum_{\text{cyclique}} a\Big)\Big(\sum_{\text{cyclique}} \frac{1}{a}\Big) \\ &\qquad \geq 16\Big(\sum_{\text{cyclique}} \frac{ab}{a+b+2c}\Big)\Big(\sum_{\text{cyclique}} \frac{c}{2ab+bc+ca}\Big). \end{aligned}$$

3318. *Proposé par D.E. Prithwijit, University College Cork, République d'Irlande.*

On suppose que les hauteurs AD, BE et CF d'un triangle ABC coupent respectivement le cercle circonscrit aux points X, Y et Z. Montrer que

$$\frac{AX}{AD} + \frac{BY}{BE} + \frac{CZ}{CF} = 4.$$

3319. *Proposé par Arkady Alt, San José, CA, É-U.*

Soit m un nombre naturel avec $m \geq 2$, et soit r un nombre réel quelconque avec $r \geq 1/m$. Si a et b sont des nombres réels positifs satisfaisant $ab = r^2$, montrer que

$$\frac{1}{(1+a)^m} + \frac{1}{(1+b)^m} \geq \frac{2}{(1+r)^m}.$$

3320. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit ABC un triangle d'angle droit en A et soit O le milieu de BC. Soit M un point dans le plan du triangle ABC, et désignons respectivement par M', M'', N, N' et N'' les orthocentres des triangles MAB, MAC, $AM'M''$, NAB et NAC. Si O est le point milieu de $M'M''$, montrer que O est aussi le point milieu de $N'N''$.

3321. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Le cercle inscrit du triangle ABC a son centre en I et touche les côtés AC et AB en E et F respectivement. Si M est un point sur le segment EF, montrer que les triangles MAB et MCA ont même aire si et seulement si $MI \perp BC$.

3322. *Proposé par Panos E. Tsaoussoglou, Athènes, Grèce.*

Soit a, b et c trois nombres réels non négatifs tels que $a \leq b \leq c$, et soit n un entier positif. Montrer que

$$\big(a+(n+1)b\big)\big(b+(n+2)c\big)(c+na) \;\geq\; (n+1)(n+2)(n+3)abc\,.$$

3323. *Proposé par Panos E. Tsaoussoglou, Athènes, Grèce.*

Soit a, b et c trois nombres réels non négatifs tels que $a^2+b^2+c^2=1$. Montrer que

$$\sum_{\text{cyclique}} (1-2a^2)(b-c)^2 \;\geq\; 0\,.$$

3324. *Proposé par Panos E. Tsaoussoglou, Athènes, Grèce.*

Soit a, b et c trois nombres réels non négatifs tels que $a^2+b^2+c^2=1$. Montrer que

$$3-5(ab+bc+ca)+6abc(a+b+c) \;\geq\; 0\,.$$

3325. *Proposé par Manuel Benito Muñoz, IES P.M. Sagasta, Logroño, Espagne.*

On désigne par $\sigma(n)$ la somme des diviseurs du nombre naturel n.

(a) Trouver un nombre naturel n tel que

$$\sigma(n)+500 \;=\; \sigma(n+2)\,.$$

(b)★ Quel est le nombre de solutions de la partie (a)?

. . . .

3313. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain and Pantelimon George Popescu, Bucharest, Romania.*

Let x_1, x_2, $\ldots$, x_n be real numbers such that $x_k > 1$ for $1 \leq k \leq n$. If we set $x_{n+1} = x_1$, prove that

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\log_{x_k} x_{k+1} + \log_{x_{k+1}} x_k\right) \;\leq\; \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\log_{x_k}^{n} x_{k+1}\right)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

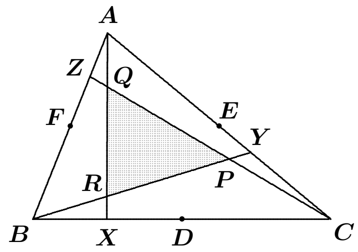
3314. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let a, b, and c be positive real numbers. Show that

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{b} \;\geq\; \frac{3}{4} + \sum_{\text{cyclic}} \frac{(a+c)^2+(a+b)c}{(b+c)(2a+b+c)}\,.$$

3315. *Proposed by Stanley Rabinowitz, MathPro Press, Chelmsford, MA, USA.*

Let D, E, and F be the mid-points of sides BC, CA, and AB, respectively, in $\triangle ABC$. Let X, Y, and Z be points on the segments BD, CE, and AF, respectively. The lines AX, BY, and CZ bound a central triangle (shaded in the diagram). Let X', Y', and Z' be the reflections of X, Y, and Z in the points D, E, and F, respectively. The points X', Y', and Z' determine in a similar manner another central triangle $P'Q'R'$.



Prove that

$$\frac{2+\sqrt{3}}{4} \;\le\; \frac{[PQR]}{[P'Q'R']} \;\le\; 8-4\sqrt{3}\,,$$

where $[STU]$ represents the area of $\triangle STU$.

3316. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let a, b, and c be positive real numbers. Show that

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{b} + \Big(\sum_{\text{cyclic}} a^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{\text{cyclic}} \frac{1}{a^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \;\ge\; \frac{2}{3}\Big(\sum_{\text{cyclic}} a\Big)\Big(\sum_{\text{cyclic}} \frac{1}{a}\Big)\,.$$

3317. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let a, b, and c be positive real numbers. Show that

$$\Big(\sum_{\text{cyclic}} \frac{a^3}{b^2-bc+c^2}\Big)\Big(\sum_{\text{cyclic}} \frac{b^2c^2}{a^3(b^2-bc+c^2)}\Big)$$
$$\ge\; \Big(\sum_{\text{cyclic}} a\Big)\Big(\sum_{\text{cyclic}} \frac{1}{a}\Big) \;\ge\; 16\Big(\sum_{\text{cyclic}} \frac{ab}{a+b+2c}\Big)\Big(\sum_{\text{cyclic}} \frac{c}{2ab+bc+ca}\Big)\,.$$

3318. *Proposed by D.E. Prithwijit, University College Cork, Republic of Ireland.*

The altitudes AD, BE, and CF of $\triangle ABC$ are produced to meet the circumcircle at X, Y, and Z, respectively. Prove that

$$\frac{AX}{AD}+\frac{BY}{BE}+\frac{CZ}{CF} \;=\; 4\,.$$

3319. *Proposed by Arkady Alt, San Jose, CA, USA.*

Let m be a natural number, $m \geq 2$, and let r be any real number such that $r \geq 1/m$. If a and b are positive real numbers satisfying $ab = r^2$, prove that

$$\frac{1}{(1+a)^m} + \frac{1}{(1+b)^m} \geq \frac{2}{(1+r)^m}.$$

3320. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $\triangle ABC$ be right-angled at A and let O be the mid-point of BC. Let M be a point in the plane of $\triangle ABC$, and let M', M'', N, N', and N'' denote the orthocentres of $\triangle MAB$, $\triangle MAC$, $\triangle AM'M''$, $\triangle NAB$, and $\triangle NAC$, respectively. If O is the mid-point of $M'M''$, show that O is also the mid-point of $N'N''$.

3321. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let the incircle of $\triangle ABC$ have centre I and meet the sides AC and AB at E and F, respectively. For a point M on the line segment EF, show that $\triangle MAB$ and $\triangle MCA$ have the same area if and only if $MI \perp BC$.

3322. *Proposed by Panos E. Tsaoussoglou, Athens, Greece.*

Let a, b, and c be non-negative real numbers such that $a \leq b \leq c$, and let n be a positive integer. Prove that

$$\big(a+(n+1)b\big)\big(b+(n+2)c\big)(c+na) \geq (n+1)(n+2)(n+3)abc.$$

3323. *Proposed by Panos E. Tsaoussoglou, Athens, Greece.*

Let a, b, and c be non-negative real numbers with $a^2+b^2+c^2=1$. Prove that

$$\sum_{\text{cyclic}}(1-2a^2)(b-c)^2 \geq 0.$$

3324. *Proposed by Panos E. Tsaoussoglou, Athens, Greece.*

Let a, b, and c be non-negative real numbers with $a^2+b^2+c^2=1$. Prove that

$$3-5(ab+bc+ca)+6abc(a+b+c) \geq 0.$$

3325. *Proposed by Manuel Benito Muñoz, IES P.M. Sagasta, Logroño, Spain.*

Let $\sigma(n)$ denote the sum of the divisors of the natural number n.

(a) Find a natural number n such that

$$\sigma(n)+500 = \sigma(n+2).$$

(b)★ How many solutions are there to part (a)?