Mayhem Problems

Veuillez nous transmettre vos solutions aux problèmes du présent numéro avant le **premier avril 2008**. *Les solutions reçues après cette date ne seront prises en compte que s'il nous reste du temps avant la publication des solutions.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

M319. *Proposé par Dragoljub Milošević, Pranjani, Serbie.*

Si, dans un triangle rectangle, on désigne par h l'hypoténuse et par a la hauteur, montrer que

$$\frac{a}{h}+\frac{h}{a} \;\geq\; \frac{5}{2}\,.$$

Quand y a-t-il égalité ?

M320. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Si p et q forment une paire de nombres premiers jumeaux, montrer que les nombres p^4+4 et q^4+4 ne sont jamais relativement premiers.

M321. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Déterminer tous les entiers positifs n et k pour lesquels on a

$$\frac{\binom{n}{n-1}^6+\binom{n-2}{k}^6+\binom{n+3}{n+1}^3}{3\binom{n-2}{k}^2\binom{n+3}{2}} \;=\; n^2\,.$$

M322. *Proposé par Panos E. Tsaoussoglou, Athènes, Grèce.*

Soit a, b et c trois nombres réels positifs. Montrer que

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \;\geq\; 2\,.$$

M323. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Trouver toutes les solutions réelles (x,y) de l'équation

$$20\sin x-21\cos x \;=\; 81y^2-18y+30\,.$$

M324. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Deux fonctions f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont définies par

$$f(x) \;=\; 3x - 1 + |2x + 1| \qquad \text{et} \qquad g(x) \;=\; \tfrac{1}{5}(3x + 5 - |2x + 5|)\,.$$

Montrer que $g \circ f = f \circ g$ et $(f \circ f)^{-1} = g \circ g$.

M325. *Proposé par Bruce Shawyer, Université Memorial de Terre-Neuve, St. John's, NL.*

Soit a, b et c trois chiffres différents de zéro. Pour calculer la fraction $\frac{ab}{ca}$, où ab et ca représentent les entiers à deux chiffres $10a + b$ et $10c + a$, un étudiant applique faussement la loi de simplification, simplifiant le a du numérateur avec le a du dénominateur. Par exemple, si $a = 6$, $b = 5$ et $c = 2$, l'étudiant obtiendrait $65/26 = 5/2$ (en "simplifiant" les 6 !).

Déterminer tous les triplets (a, b, c) pour lesquels cet étudiant obtiendrait un résultat juste.

M319. *Proposed by Dragoljub Milošević, Pranjani, Serbie.*

If h and a are the hypotenuse and altitude, respectively, of a right-angled triangle, prove that

$$\frac{a}{h} + \frac{h}{a} \;\geq\; \frac{5}{2}\,.$$

When does equality hold?

M320. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

If p and q are any pair of twin primes, show that the numbers $p^4 + 4$ and $q^4 + 4$ are never relatively prime.

M321. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Determine all positive integers n and k for which we have

$$\frac{\binom{n}{n-1}^6 + \binom{n-2}{k}^6 + \binom{n+3}{n+1}^3}{3\binom{n-2}{k}^2\binom{n+3}{2}} \;=\; n^2\,.$$

M322. *Proposed by Panos E. Tsaoussoglou, Athens, Greece.*

Let a, b, and c be positive real numbers. Prove that

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \;\geq\; 2\,.$$

M323. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Find all real solutions (x, y) to the equation

$$20\sin x - 21\cos x \;=\; 81y^2 - 18y + 30\,.$$

M324. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let functions f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be defined by

$$f(x) \;=\; 3x - 1 + |2x+1| \qquad \text{and} \qquad g(x) \;=\; \tfrac{1}{5}(3x + 5 - |2x+5|)\,.$$

Prove that $g \circ f = f \circ g$ and $(f \circ f)^{-1} = g \circ g$.

M325. *Proposed by Bruce Shawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

Let a, b, and c be non-zero digits. A student takes the fraction $\dfrac{ab}{ca}$, where ab and ca represent the two-digit integers $10a + b$ and $10c + a$, and applies a (false) cancellation law, cancelling the a from the numerator with the a from the denominator. For example, if $a = 6$, $b = 5$, and $c = 2$, the student would obtain $65/26 = 5/2$ (by 'cancelling' the 6s!).

Determine all triples (a, b, c) for which this student actually obtains the correct answer.