PROBLEMS

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1er juin 2008**. *Une étoile (⋆) après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

3289. *Proposé par Virgil Nicula, Bucarest, Roumanie.*

Soit ABC un triangle à l'intérieur duquel il existe un point D tel que $\angle DAB = \angle DCA$ et $\angle DBA = \angle DAC$. Soit respectivement les points E et F sur les droites AB et CA tels que $AB = BE$ et $CA = AF$. Montrer que les points A, E, D et F sont sur un même cercle.

3290. *Proposé par Virgil Nicula, Bucarest, Roumanie.*

Soit $ABCD$ un trapèze avec $AD \parallel BC$. Désignons respectivement par a et b les longueurs de AD et BC. Soit respectivement M, P et Q les points milieu de CD, AM et BM. Si N est l'intersection de DP et CQ, montrer que N appartient à l'intérieur du triangle ABM si et seulement si $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 3$.

3291. *Proposé par Virgil Nicula, Bucarest, Roumanie.*

Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC$. Trouver tout les points P tels que la somme des carrés des distances des points A, B et C à une droite quelconque par P est constante.

3292. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit a, b, c et d des nombres réels arbitraires. Montrer que

$$\begin{aligned} 11a^2 + 11b^2 + 221c^2 + 131d^2 + 22ab + 202cd + 48c + 6 \\ \geq \quad 98ac + 98bc + 38ad + 38bd + 12a + 12b + 12d\,. \end{aligned}$$

3293. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\arcsin\left(\dfrac{9k+2}{\sqrt{27k^3+54k^2+36k+8}}\right)}{\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3k+1}}\right)} \;=\; 3^n\,.$$

3294. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Pour tous les entiers positifs m et n, montrer que

$$m(m+1)n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) - n(n+1)m^2(m+1)^2(2m^2+2m-1)$$

est divisible par 720.

3295. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Pour $x > 0$, soit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sup\{u(t) : t > \ln(1/x)\} \\ \text{et} \quad g(x) &= \sup\{u(t) - xe^{-t} : t \in \mathbb{R}\} . \end{aligned}$$

Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x)$.

3296. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Trouver la plus grande constante K telle que

$$\frac{b^2c^2}{a^2(a-b)(a-c)} + \frac{c^2a^2}{b^2(b-c)(b-a)} + \frac{a^2b^2}{c^2(c-a)(c-b)} > K$$

pour tous les nombres réels positifs distincts a, b et c.

3297. *Proposé par Stanley Rabinowitz, MathPro Press, Chelmsford, MA, USA.*

Si A, B et C sont les angles d'un triangle, montrer que

$$\sin A + \sin B \sin C \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} .$$

Quand y a-t-il égalité ?

3298. *Proposé par Stanley Rabinowitz, MathPro Press, Chelmsford, MA, USA.*

Soit ABC un triangle d'aire $\frac{1}{2}$ où a est la longueur du côté opposé au sommet A. Montrer que

$$a^2 + \csc A \geq \sqrt{5} .$$

[*Ed. :* Le proposeur n'a qu'une démonstration par ordinateur de ce fait. Il espère que quelqu'un parmi les lecteurs de ***CRUX with MAYHEM*** trouvera une solution plus simple.]

3299. *Proposé par Victor Oxman, Western Galilee College, Israël.*

Etant donné trois nombres réels a, b et w_b, montrer que

(a) s'il existe un triangle ABC avec $BC = a$, $CA = b$, et si la longueur de la bissectrice intérieure de l'angle B est égale à w_b, alors il est unique à un isomorphisme près ;

(b) pour que l'existence d'un triangle comme dans (a) soit assurée, il est nécessaire et suffisant que

$$b > \frac{2a\,|a - w_b|}{2a - w_b} \geq 0\,;$$

(c) si h_a est la longueur de la hauteur abaissée sur le côté BC d'un triangle comme dans (a), on a $b > |a - w_b| + \frac{1}{2}h_a$.

3300. *Proposé par Arkady Alt, San José, CA, É-U.*

Soit a, b et c trois nombres réels positifs. Pour tout entier positif n, on définit

$$F_n = \left(\frac{3(a^n + b^n + c^n)}{a+b+c} - \sum_{\text{cyclic}} \frac{b^n + c^n}{b+c} \right) .$$

(a) Montrer que $F_n \geq 0$ pour $n \leq 5$.

(b)★ Montrer si oui ou non, $F_n \geq 0$ pour $n \geq 6$.

. . . .

3289. *Proposed by Virgil Nicula, Bucharest, Romania.*

Let ABC be a triangle for which there exists a point D in its interior such that $\angle DAB = \angle DCA$ and $\angle DBA = \angle DAC$. Let E and F be points on the lines AB and CA, respectively, such that $AB = BE$ and $CA = AF$. Prove that the points A, E, D, and F are concyclic.

3290. *Proposed by Virgil Nicula, Bucharest, Romania.*

Let $ABCD$ be a trapezoid with $AD \parallel BC$. Denote the lengths of AD and BC by a and b, respectively. Let M be the mid-point of CD, and let P and Q be the mid-points of AM and BM, respectively. If N is the intersection of DP and CQ, prove that N belongs to the interior of $\triangle ABM$ if and only if $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 3$.

3291. *Proposed by Virgil Nicula, Bucharest, Romania.*

Let ABC be an isosceles triangle with $AB = AC$. Find all points P such that the sum of the squares of the distances of the points A, B, and C from any line through P is constant.

3292. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let a, b, c, and d be arbitrary real numbers. Show that

$$\begin{aligned} 11a^2 + 11b^2 + 221c^2 + 131d^2 + 22ab + 202cd + 48c + 6 & \\ \geq \quad 98ac + 98bc + 38ad + 38bd + 12a + 12b + 12d\,. & \end{aligned}$$

3293. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Prove that

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\arcsin\left(\dfrac{9k+2}{\sqrt{27k^3+54k^2+36k+8}}\right)}{\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3k+1}}\right)} \;=\; 3^n\,.$$

3294. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

For all positive integers m and n, show that

$$m(m+1)n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) - n(n+1)m^2(m+1)^2(2m^2+2m-1)$$

is divisible by 720.

3295. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a bounded function. For $x > 0$, let

$$\begin{aligned} f(x) &= \sup\{u(t) : t > \ln(1/x)\} \\ \text{and} \quad g(x) &= \sup\{u(t) - xe^{-t} : t \in \mathbb{R}\}\,. \end{aligned}$$

Prove that $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

3296. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Find the greatest constant K such that

$$\frac{b^2c^2}{a^2(a-b)(a-c)} + \frac{c^2a^2}{b^2(b-c)(b-a)} + \frac{a^2b^2}{c^2(c-a)(c-b)} \;>\; K$$

for all distinct positive real numbers a, b, and c.

3297. *Proposed by Stanley Rabinowitz, MathPro Press, Chelmsford, MA, USA.*

If A, B, and C are the angles of a triangle, prove that

$$\sin A + \sin B \sin C \;\leq\; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

When does equality hold?

3298. *Proposed by Stanley Rabinowitz, MathPro Press, Chelmsford, MA, USA.*

Let ABC be a triangle of area $\frac{1}{2}$ in which a is the length of the side opposite vertex A. Prove that

$$a^2 + \csc A \;\geq\; \sqrt{5}\,.$$

[*Ed.:* The proposer's only proof of this is by computer. He is hoping that some ***CRUX with MAYHEM*** reader will find a simpler solution.]

3299. *Proposed by Victor Oxman, Western Galilee College, Israel.*

Given positive real numbers a, b, and w_b, show that

(a) if a triangle ABC exists with $BC = a$, $CA = b$, and the length of the interior bisector of angle B equal to w_b, then it is unique up to isomorphism;

(b) for the existence of such a triangle in (a), it is necessary and sufficient that

$$b \;>\; \frac{2a\,|a - w_b|}{2a - w_b} \;\geq\; 0\,;$$

(c) if h_a is the length of the altitude to side BC in such a triangle in (a), we have $b > |a - w_b| + \frac{1}{2}h_a$.

3300. *Proposed by Arkady Alt, San Jose, CA, USA.*

Let a, b, and c be positive real numbers. For any positive integer n define

$$F_n \;=\; \left(\frac{3(a^n + b^n + c^n)}{a+b+c} - \sum_{\text{cyclic}} \frac{b^n + c^n}{b+c}\right)\,.$$

(a) Prove that $F_n \geq 0$ for $n \leq 5$.

(b)★ Prove or disprove that $F_n \geq 0$ for $n \geq 6$.