Mayhem Problems

Please send your solutions to the problems in this edition by **1 January 2008**. *Solutions received after this date will only be considered if there is time before publication of the solutions.*

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, and 7, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, and 8, French will precede English.

The editor thanks Jean-Marc Terrier and Martin Goldstein of the University of Montreal for translations of the problems.

M301. *Proposed by D.E. Prithwijit, University College Cork, Republic of Ireland.*

The general term of a sequence is $t_n = n^2 + 20$, for $n \geq 1$. Show that for all $n \geq 1$, the greatest common divisor of t_n and t_{n+1} must be a divisor of 81.

M302. *Proposed by Babis Stergiou, Chalkida, Greece.*

A triangle ABC has $\angle ABC = \angle ACB = 40^\circ$. If P is a point in the interior of the triangle such that $\angle PBC = 20^\circ$ and $\angle PCB = 30^\circ$, prove that $BP = BA$.

M303. *Proposed by Neven Jurič, Zagreb, Croatia.*

A curious relation among squares states that the sum of $n+1$ consecutive squares, beginning with the square of $n(2n+1)$, is equal to the sum of the squares of the next n consecutive integers. (For example, when $n = 1$ we have $3^2 + 4^2 = 5^2$, and when $n = 2$ we have $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.) Show that this property holds for any $n \geq 1$.

M304. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let a, b, and c be real numbers such that both $a+b+c$ and $ab+bc+ca$ are rational numbers. Show that $a^4+b^4+c^4$ is a rational number if and only if the product abc is a rational number.

M305. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Find all real solutions to the following system of equations:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} &= 3\,, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z} &= 3\,, \\ x^2\sqrt{x} + y^2\sqrt{y} + z^2\sqrt{z} &= 3\,. \end{aligned}$$

M306. *Proposed by Bruce Shawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

Find all solutions to the following addition problem, in which each letter represents a distinct digit:

$$\begin{array}{cccccc} & & & \mathrm{T} & \mathrm{E} & \mathrm{N} \\ & & & \mathrm{T} & \mathrm{E} & \mathrm{N} \\ & & \mathrm{N} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{E} \\ & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{G} & \mathrm{H} & \mathrm{T} \\ + & \mathrm{T} & \mathrm{H} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{E} \\ \hline & \mathrm{F} & \mathrm{O} & \mathrm{R} & \mathrm{T} & \mathrm{Y} \end{array}$$

....

M301. *Proposé par D.E. Prithwijit, University College Cork, République d'Irlande.*

Soit $t_n = n^2 + 20$, pour $n \geq 1$, le terme général d'une suite. Montrer que pour tout $n \geq 1$, le plus grand commun diviseur de t_n et t_{n+1} doit être un diviseur de 81.

M302. *Proposé par Babis Stergiou, Chalkida, Grèce.*

Soit ABC un triangle avec $\angle ABC = \angle ACB = 40^\circ$. Si P est un point à l'intérieur du triangle de sorte que $\angle PBC = 20^\circ$ et $\angle PCB = 30^\circ$, montrer que $BP = BA$.

M303. *Proposé par Neven Jurič, Zagreb, Croatie.*

Une curieuse relation entre les carrés de nombres naturels montre que la somme de $n + 1$ carrés consécutifs, commençant par le carré de $n(2n + 1)$, est égale à la somme des carrés des n entiers consécutifs suivants. (Par exemple, si $n = 1$ on a $3^2 + 4^2 = 5^2$, et si $n = 2$ on a $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.) Montrer que cette propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

M304. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit a, b et c trois nombres réels tels que les sommes $a + b + c$ et $ab + bc + ca$ sont des nombres rationnels. Montrer qu'alors $a^4 + b^4 + c^4$ est un nombre rationnel si et seulement si le product abc est un nombre rationnel.

M305. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Trouver toutes les solutions réelles du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} &= 3\,, \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z} &= 3\,, \\ x^2\sqrt{x}+y^2\sqrt{y}+z^2\sqrt{z} &= 3\,. \end{aligned}$$

M306. *Proposé par Bruce Shawyer, Université Memorial de Terre-Neuve, St. John's, NL.*

Trouver toutes les solutions du problème d'addition suivant, dans lequel chaque lettre représente un chiffre distinct :

$$\begin{array}{cccccc} & & & T & E & N \\ & & & T & E & N \\ & & N & I & N & E \\ & E & I & G & H & T \\ + & T & H & R & E & E \\ \hline & F & O & R & T & Y \end{array}$$