# PROBLEMS

*Solutions to problems in this issue should arrive no later than* **1 March 2008**. *An asterisk* ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

*Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, and 7, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, and 8, French will precede English. In the solutions' section, the problem will be stated in the language of the primary featured solution.*

*The editor thanks Jean-Marc Terrier of the University of Montreal for translations of the problems.*

We inadvertently credited Panos E. Tsaoussoglou, Athens, Greece as the proposer of 3225 [2007 : 112, 115]. The actual proposer was George Tsapakidis, Agrinio, Greece. We apologize to both parties for this error.

**3221**. Correction. *Proposed by Juan-Bosco Romero Márquez, Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain.*

Let $ABC$ be a triangle with sides $a \geq b \geq c$ opposite the angles $A$, $B$, $C$, respectively. Let $AH$ be perpendicular to the side $BC$ with $H$ on $BC$. Set $m = BH$ and $n = CH$. Prove that $a(bm + cn) - bc(b + c)$ is positive, negative, or zero according as $\angle A$ is obtuse, acute, or right-angled.

**3251**. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $u_1$, $u_2$, and $u_3$ be any real numbers. Prove that

$$\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\left[\cos^2(u_i - u_{i+1}) + \cos^2(u_i + u_{i+1})\right] \geq (\cos u_1 \cos u_2 \cos u_3)^2 + (\sin u_1 \sin u_2 \sin u_3)^2\,,$$

where the subscripts in the summation are taken modulo $3$.

**3252**. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $\mathcal{S}$ be a set of complex $2 \times 2$ matrices such that, for all $A$, $B$, $C \in \mathcal{S}$, we have $ABCAB = C$.

(a) Show that $(ABC)^n = A^n B^n C^n$ for all positive integers $n$ and all matrices $A$, $B$, $C \in \mathcal{S}$.

(b) Give an example of such a set $\mathcal{S}$ containing at least three matrices with two of them non-commuting.

**3253**. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Prove that

$$\log_e(e^\pi - 1)\log_e(e^\pi + 1) + \log_\pi(\pi^e - 1)\log_\pi(\pi^e + 1) \;<\; e^2 + \pi^2\,.$$

**3254**. *Proposed by G. Tsintsifas, Thessaloniki, Greece.*

Let $\mathcal{C}$ be a convex figure in the plane. A *diametrical chord* $AB$ of $\mathcal{C}$ parallel to the direction vector $\overrightarrow{v}$ is a chord of $\mathcal{C}$ of maximal length parallel to the direction vector $\overrightarrow{v}$.

Prove that if every diametrical chord of $\mathcal{C}$ bisects the area enclosed by $\mathcal{C}$, then $\mathcal{C}$ must be centro-symmetric.

**3255**. *Proposed by G. Tsintsifas, Thessaloniki, Greece.*

Prove that, as the points $A$, $B$, $C$ move over the surface of an ellipsoid centred at $O$ while the lines $OA$, $OB$, $OC$ stay mutually perpendicular, the plane $ABC$ remains tangent to a fixed sphere.

**3256**. *Proposed by Václav Konečný, Big Rapids, MI, USA.*

A *bicentric* quadrilateral (also called a *chord-tangent* quadrilateral) is a quadrilateral that is simultaneously inscribed in one circle and circumscribed about another.

Let $ABCD$ be a bicentric quadrilateral in which there are no parallel sides. Suppose that the circumscribed and inscribed circles of $ABCD$ have centres $O$ and $I$, respectively. Let $AC$ meet $BD$ at $E$. Join the points of tangency on the opposite sides of the quadrilateral, thus obtaining two lines which intersect at a point $T$.

Prove that $O$, $E$, $T$, and $I$ are collinear. When do the points $E$ and $T$ coincide? (Compare 2978 [2004 : 429, 432; 2005 : 470–472].)

**3257**. *Proposed by Bill Sands, University of Calgary, Calgary, AB.*

Find the number of ordered pairs $(A, B)$ of subsets of $\{1, 2, \ldots, 13\}$ such that $|A \cup B|$ is even.

**3258★**. *Proposed by Alper Cay, Uzman Private School, Kayseri, Turkey.*

Let $ABC$ be a triangle with $\angle ABC = 80°$. Let $BD$ be the angle bisector of $\angle ABC$ with $D$ on $AC$. If $AD = DB + BC$, determine $\angle A$, using a purely geometric argument.

**3259**. *Proposed by Neven Jurič, Zagreb, Croatia.*

Is it possible to find a cubic polynomial $P$ such that, for any positive integer $n$, the polynomial $\underbrace{P \circ P \circ \cdots \circ P}_{n \text{ times}}$ has exactly $3^n$ distinct real roots? Find one, if possible, or show that none exists.

**3260**. *Proposed by Virgil Nicula, Bucharest, Romania.*

Let $a$, $b$ be distinct positive real numbers such that $(a-1)(b-1) \geq 0$. Prove that

$$a^b + b^a \;\geq\; 1 + ab + (1-a)(1-b) \cdot \min\{1, ab\}\,.$$

**3261**. *Proposed by Ovidiu Furdui, student, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, USA.*

The Fibonacci numbers $F_n$ and Lucas numbers $L_n$ are defined by the following recurrences:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0\,, \quad F_1 = 1\,, \quad \text{and} \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\,, \quad \text{for } n \geq 1; \\ L_0 &= 2\,, \quad L_1 = 1\,, \quad \text{and} \quad L_{n+1} = L_n + L_{n-1}\,, \quad \text{for } n \geq 1. \end{aligned}$$

Prove that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{L_{2n}}\right)\arctan\left(\frac{1}{L_{2n+2}}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)} \;\leq\; \frac{4}{\pi}\arctan(\beta)\left(\arctan(\beta)+\frac{1}{3}\right),$$

where $\beta = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

**3262**. *Proposed by Ovidiu Furdui, student, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, USA.*

Let $m$ be an integer, $m \geq 2$, and let $a_1$, $a_2$, $\dots$, $a_m$ be positive real numbers. Evaluate the limit

$$L_m \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^m}\int_1^e \prod_{k=1}^{m} \ln\bigl(1 + a_k x^n\bigr)\,dx\,.$$

**3221**. Correction. *Proposé par Juan-Bosco Romero Márquez, Université de Valladolid, Valladolid, Espagne.*

Soit $ABC$ un triangle de côtés $a \geq b \geq c$ opposés respectivement aux angles $A$, $B$ et $C$. Soit $AH$ la perpendiculaire au côté $BC$ avec $H$ sur $BC$. Posons $m = BH$ et $n = CH$. Montrer que $a(bm+cn) - bc(b+c)$ est positif, négatif ou nul, suivant que l'angle $A$ est obtus, aigu ou droit.

**3251**. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit $u_1$, $u_2$ et $u_3$ trois nombres réels arbitraires. Montrer que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\left[\cos^2(u_i - u_{i+1}) + \cos^2(u_i + u_{i+1})\right] \\ &\qquad\qquad \geq\; (\cos u_1 \cos u_2 \cos u_3)^2 + (\sin u_1 \sin u_2 \sin u_3)^2\,, \end{aligned}$$

où, dans la sommation, les indices sont calculés modulo 3.

**3252**. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de matrices $2 \times 2$ complexes telles que pour tout $A$, $B$ et $C \in \mathcal{S}$, on ait $ABCAB = C$.

(a) Montrer que $(ABC)^n = A^n B^n C^n$ pour tous les entiers positifs $n$ et toutes les matrices $A$, $B$ et $C \in \mathcal{S}$.

(b) Donner un exemple d'un tel ensemble $\mathcal{S}$ contenant au moins trois matrices avec deux d'entre elles ne commutant pas.

**3253**. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Montrer que

$$\log_e(e^\pi - 1)\log_e(e^\pi + 1) + \log_\pi(\pi^e - 1)\log_\pi(\pi^e + 1) \ < \ e^2 + \pi^2 \,.$$

**3254**. *Proposé par George Tsintsifas, Thessalonique, Grèce.*

Soit $\mathcal{C}$ une figure plane convexe. Une *corde diamétrale* $AB$ de $\mathcal{C}$ parallèle au vecteur non nul $\overrightarrow{v}$ est une corde de $\mathcal{C}$ parallèle au vecteur $\overrightarrow{v}$ et de longueur maximale.

Montrer que si toute corde diamétrale de $\mathcal{C}$ sépare la portion bornée par $\mathcal{C}$ en deux parties d'aire égale, alors $\mathcal{C}$ doit posséder un centre de symétrie.

**3255**. *Proposé par George Tsintsifas, Thessalonique, Grèce.*

Montrer que si les points $A$, $B$ et $C$ se déplacent au-dessus de la surface d'une ellipsoïde centrée en $O$ et que les droites $OA$, $OB$ et $OC$ restent mutuellement perpendiculaires, alors le plan $ABC$ reste tangent à une sphère fixe.

**3256**. *Proposé par Václav Konečný, Big Rapids, MI, USA.*

Un quadrilatère *bicentrique* est un quadrilatère qui possède à la fois un cercle incrit et un cercle circonscrit .

Soit $ABCD$ un quadrilatère bicentrique sans côtés parallèles. Soit respectivement $I$ et $O$ les centres des cercles incrit et circonscrit. Soit $E$ le point d'intersection de $AC$ et $BD$. Si on relie par des droites les points de tangence des côtés opposés du quadrilatère, elles se coupent en un point $T$.

Montrer que $O$, $E$, $T$ et $I$ sont colinéaires. Quand les points $E$ et $T$ coincident-ils ? (Comparer avec 2978 [2004 : 429, 432 ; 2005 : 470–472].)

**3257**. *Proposé par Bill Sands, Université de Calgary, Calgary, AB.*

Trouver le nombre de paires ordonnées $(A, B)$ de sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, 13\}$ telles que $|A \cup B|$ soit pair.

**3258**★. *Proposé par Alper Cay, Uzman Private School, Kayseri, Turkey.*

Soit $ABC$ un triangle dont l'angle $ABC$ vaut 80°. Soit $BD$ la bissectrice de l'angle $ABC$, avec $D$ sur $AC$. Si $AD = DB + BC$, trouver l'angle $A$ en utilisant un argument purement géométrique.

**3259**. *Proposé par Neven Jurič, Zagreb, Croatie.*

Est-il possible de trouver un polynôme cubique $P$ tel que, pour tout entier positif $n$, le polynôme $\underbrace{P \circ P \circ \cdots \circ P}_{n \text{ fois}}$ possède exactement $3^n$ racines réelles distinctes ? En trouver une, si possible, ou montrer qu'il n'en existe aucune.

**3260**. *Proposé par Virgil Nicula, Bucarest, Roumanie.*

Soit $a$ et $b$ deux nombres réels positifs distincts et tels que $(a-1)(b-1) \geq 0$. Montrer que

$$a^b + b^a \;\geq\; 1 + ab + (1-a)(1-b) \cdot \min\{1, ab\}\,.$$

**3261**. *Proposé par Ovidiu Furdui, étudiant, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, É-U.*

Les nombres de Fibonacci $F_n$ et les nombres de Lucas $L_n$ sont définis par les récurrences :

$$\begin{array}{llll} F_0 = 0\,, & F_1 = 1\,, & \text{et} \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\,, & \text{pour } n \geq 1\,; \\ L_0 = 2\,, & L_1 = 1\,, & \text{et} \quad L_{n+1} = L_n + L_{n-1}\,, & \text{pour } n \geq 1. \end{array}$$

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{L_{2n}}\right) \arctan\left(\frac{1}{L_{2n+2}}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)} \;\leq\; \frac{4}{\pi} \arctan(\beta) \left(\arctan(\beta) + \frac{1}{3}\right),$$

où $\beta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$.

**3262**. *Proposé par Ovidiu Furdui, étudiant, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, É-U.*

Soit $m$ un entier, $m \geq 2$, et soit $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des nombres réels positifs. Calculer la limite

$$L_m \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^m} \int_1^e \prod_{k=1}^{m} \ln\left(1 + a_k x^n\right) dx\,.$$