PROBLEMS

Faire parvenir les propositions de problèmes et les solutions à Bruce Shawyer, Department of Mathematics and Statistics, Memorial University of Newfoundland, St. John's (Terre-Neuve), Canada, A1C 5S7. Les propositions de problèmes doivent être accompagnées d'une solution ainsi que de références et d'autres indications qui pourraient être utiles à la rédaction. Si vous envoyez une proposition sans solution, vous devez justifier une solution probable en fournissant suffisamment d'information. Un numéro suivi d'une astérisque ($\star$) *indique que le problème a été proposé sans solution.*

Nous sollicitons en particulier des problèmes originaux. Cependant, d'autres problèmes intéressants pourraient être acceptables s'ils ne sont pas trop connus et si leur provenance est précisée. Normalement, si l'auteur d'un problème est connu, il faut demander sa permission avant de proposer un de ses problèmes.

Pour faciliter l'étude de vos propositions, veuillez taper ou écrire à la main (lisiblement) chaque problème sur une feuille distincte de format $8\frac{1}{2}$"$\times 11$" *ou* A4, *la signer et la faire parvenir au rédacteur en chef. Les propositions devront lui parvenir au plus tard le* **1er octobre 2002**. *Vous pouvez aussi les faire parvenir par courriel à* **crux-editors@cms.math.ca**. (*Nous apprécierions de recevoir les problèmes et solutions envoyés par courriel au format* LaTeX). *Les fichiers graphiques doivent être de format « epic » ou « eps » (encapsulated postscript). Les solutions reçues après la date ci-dessus seront prises en compte s'il reste du temps avant la publication. Veuillez prendre note que nous n'acceptons pas les propositions par télécopieur.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais.

Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

2713. *Proposé par Toshio Seimiya, Kawasaki, Japan.*

Soit O un point intérieur du triangle ABC et supposons que AO, BO et CO coupent BC, CA et AB en D, E et F, respectivement. Soit H le pied de la perpendiculaire à EF passant par D.

Montrer que les pieds des perpendiculaires à AF, FO, OE et EA passant par H sont sur un même cercle.

. . . .

Suppose that O is an interior point of $\triangle ABC$, and that AO, BO and CO meet BC, CA and AB at D, E and F, respectively. Let H be the foot of the perpendicular from D to EF.

Prove that the feet of the perpendiculars from H to AF, FO, OE and EA are concyclic.

2714. *Proposé par Toshio Seimiya, Kawasaki, Japan.*

Soient respectivement D et E des points sur les côtés AC et AB d'un triangle ABC, de sorte que $\angle DBC = 2\angle ABD$ et $\angle ECB = 2\angle ACE$. Si BD et CE se coupent en O et si $OD = OE$, que peut-on dire de ce triangle ?

. . . .

Suppose that D and E are points on sides AC and AB, respectively, of $\triangle ABC$, such that $\angle DBC = 2\angle ABD$ and $\angle ECB = 2\angle ACE$. Suppose that BD and CE meet at O, and that $OD = OE$. Characterize $\triangle ABC$.

2715. *Proposé par Toshio Seimiya, Kawasaki, Japan.*

Soit O le centre du cercle inscrit à un quadrilatère convexe $ABCD$. Si E et F sont respectivement les centres des cercles inscrits aux triangles ABC et ADC, montrer que A, O et le centre du cercle circonscrit au triangle AEF sont sur une droite.

. . . .

Suppose that the convex quadrilateral $ABCD$ has an incircle with centre O. Let E and F be the incentres of $\triangle ABC$ and $\triangle ADC$, respectively. Prove that A, O and the circumcentre of $\triangle AEF$ are collinear.

2716. *Proposé par Toshio Seimiya, Kawasaki, Japan.*

On suppose que

1. $ABCD$ est un quadrilatère convexe donné,
2. P est un point sur AD situé au-delà de A de telle sorte que $\angle APB = \angle BAC$,
3. Q est un point sur AD situé au-delà de D de telle sorte que $\angle DQC = \angle BDC$, et
4. $AP = DQ$.

Que peut-on dire du quadrilatère $ABCD$?

. . . .

Suppose that

1. convex quadrilateral $ABCD$ is given,
2. P is a point of AD produced beyond A such that $\angle APB = \angle BAC$,
3. Q is a point on AD produced beyond D such that $\angle DQC = \angle BDC$, and
4. $AP = DQ$.

Characterize quadrilateral $ABCD$.

2717. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Pour tout triangle ABC, montrer que

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \;\le\; \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{C-A}{2}\right) .$$

. . . .

For any triangle ABC, prove that

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \;\le\; \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{C-A}{2}\right) .$$

2718. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Soit $A_k \in M_m(\mathbb{R})$ tels que $A_iA_j = O_m$, i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, avec $i < j$ et $x_k \in \mathbb{R}^*$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Montrer que

$$\det\left(I_m + \sum_{k=1}^{n}\left(x_kA_k + x_k^2A_k^2\right)\right) \;\ge\; 0 .$$

. . . .

Let $A_k \in M_m(\mathbb{R})$ with $A_iA_j = O_m$, i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, with $i < j$ and $x_k \in \mathbb{R}^*$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Prove that

$$\det\left(I_m + \sum_{k=1}^{n}\left(x_kA_k + x_k^2A_k^2\right)\right) \;\ge\; 0 .$$

2719. *Proposé par Antal E. Fekete, Memorial University, St. John's, Newfoundland.*

Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour $n = 1$ et $n = 2$,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(k+j)^n}{j!} \;=\; (-1)^n\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-k-2+j)^n}{j!}$$

et

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(k+j)^n}{j!} \;=\; (-1)^n\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(-k-2+j)^n}{j!}$$

Ces égalités sont-elles vraies ou fausses pour d'autres valeurs entières positives de n ?

. . . .

Let $k \in \mathbb{Z}$ and $n \in \mathbb{N}$. Show that

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(k+j)^n}{j!} \;=\; (-1)^n\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-k-2+j)^n}{j!}$$

and

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{(k+j)^n}{j!} = (-1)^n \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{(-k-2+j)^n}{j!}$$

for $n = 1$ and $n = 2$.

Are these equalities true or false for other positive integral values of n?

2720. *Proposé par Antal E. Fekete, Memorial University, St. John's, Newfoundland.*

Soit k un entier et n un entier non négatif.

(a) Montrer que $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(k+j)^n}{j!}$ est un multiple entier de e et trouver la somme.

(b) Montrer que $\sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(k+j)^n}{j!}$ est un multiple entier de $\frac{1}{e}$ et trouver la somme.

. . . .

Let k be an integer and n be a non-negative integer.

(a) Show that $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(k+j)^n}{j!}$ is an integral multiple of e, and find the sum.

(b) Show that $\sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(k+j)^n}{j!}$ is an integral multiple of $\frac{1}{e}$, and find the sum.

2721. *Proposé par Vedula N. Murty, Visakhapatnam, India.*

On considère l'équation cubique $x^3 - 19x + 30 = 0$. Il est facile de vérifier que les racines de cette équation sont -5, 2 et 3. Si l'on essaie de résoudre l'équation ci-dessus par la méthode trigonométrique, on trouve que les racines sont :

$$-2\rho^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \quad -2\rho^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{2\pi+\theta}{3}\right), \quad \text{et} \quad -2\rho^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{4\pi+\theta}{3}\right),$$

où $\rho^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{19}{3}}$ et $\cos\theta = 15\left(\frac{3}{19}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Sans utiliser de calculatrice, montrer que

$$-2\rho^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = -5, \; -2\rho^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{2\pi+\theta}{3}\right) = 2, \; \text{et} \; -2\rho^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{4\pi+\theta}{3}\right) = 3\,.$$

Consider the cubic equation $x^3 - 19x + 30 = 0$. It is easily verified that the roots of this equation are -5, 2 and 3. If one tries to solve the above equation using trigonometry, the roots come out as

$$-2\rho^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \quad -2\rho^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{2\pi+\theta}{3}\right), \quad \text{and} \quad -2\rho^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{4\pi+\theta}{3}\right),$$

where $\rho^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{19}{3}}$ and $\cos\theta = 15\left(\frac{3}{19}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Show, without the use of a calculator, that

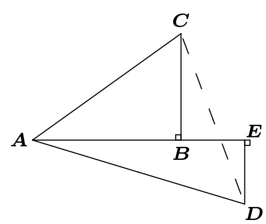
$$-2\rho^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = -5, \; -2\rho^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{2\pi+\theta}{3}\right) = 2, \; \text{and} \; -2\rho^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{4\pi+\theta}{3}\right) = 3\,.$$

2722. *Proposé par Václav Konečný, Ferris State University, Big Rapids, MI, USA.*

On considère deux triangles pythagoriciens comme indiqué dans la figure. Les longueurs de AC, CB, AD et DE sont des nombres impairs et les longueurs des côtés superposés, AE et AB, sont des nombres pairs.

Existe-t-il une configuration semblable telle que la longueur de CD soit un entier ?

. . . .



Consider two Pythagorean triangles as indicated in the figure. The lengths of AC, CB, AD and DE are odd integers and the lengths of the overlapping sides, AE and AB, are even integers.

Does there exist such a configuration of Pythagorean triangles such that the length of CD is an integer?

2723. *Proposé par Walther Janous, Ursulinengymnasium, Innsbruck, Austria.*

Soit n_1, n_2, $\ldots$, n_k $(1 \leq k \leq N)$ des entiers non négatifs tels que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = N$. Trouver la valeur minimale de la somme $\sum\limits_{j=1}^{k} \binom{n_j}{m}$ lorsque (a) $m = 2$; (b)* $m \geq 3$.

. . . .

For $1 \leq k \leq N$, let n_1, n_2, $\ldots$, n_k be non-negative integers such that $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = N$. Determine the minimum value of the sum $\sum\limits_{j=1}^{k} \binom{n_j}{m}$ when (a) $m = 2$; (b)* $m \geq 3$.